गणित में समस्याओं से जूझने का आनंद

मुकेश मालवीय

बच्चों के साथ गणित शिक्षण प्रक्रिया में क्या टीचर भी आनंद ले सकते हैं ? पाठ्यपुस्तकों में लिखी बातें ,अवधारणाएं,चुनौतियाँ बच्चों के लिए तो नई होती हैं ,पर टीचर के लिए यह सब कुछ पुराना देखा समझा हुआ ही होता है | स्कूली गणित की कोई अवधारणा या चुनौती टीचर के लिए जिज्ञासा या नयेपन से नहीं खुलती क्योकि साल दर साल वे इसे उसी तरह से देखते आये हैं | कुछ टीचर के साथ कभी यह हो कि उनके मन में किसी अवधारणा की समझ के प्रति शंका पैदा हो और वें बच्चों को समझाने के लिये नहीं बल्कि अपने लिए उस अवधारणा को फिर से समझने कि कोशिश करें जैसे - क्षेत्रफल के सवालों को समझाते हुए उनके मन में आये कि लम्बाई में चौडाई का गुणा करने पर क्षेत्रफल कैसे निकल आता है? या भिन्न को समझाने के लिए किसी इकाई के बराबर हिस्से करना क्यों ज़रुरी है? या कोई सूत्र या नियम क्या है ? इसके बजाय नियम वैसा ही क्यों है? जब टीचर खुद के लिए गणित को समझते हैं तब ही उनके पास इन गणितीय अवधाराणाओं के अलग तरह से अपने नए अर्थ बनते है | इन नए अर्थो को टीचर अपने शब्दों में पिरोकर बच्चों के साथ संवाद की एक नई भाषा बना सकते हैं जो पाठ्यपुस्तक की भाषा से अलग होती है |सीखने सिखाने का यह अर्थपूर्ण संवाद और अनुक्रिया गणितीय अवधारणा को समझने, गणितीय चुनौतियों को हल करने, अपने तर्क इस्तेमाल करने, गणितीय समस्या से जूझने, उपलब्धि सफलता या उत्तर हासिल करने में बच्चों और टीचर को एक जैसे आनन्द का भाव उत्पन्न करता है |

बच्चों के सामने गणित अगर उन्हें समझ में आने वाले सवाल या समस्या या किसी चुनौती के रूप में आता है तो वे उसे हल करने की तरफ अग्रसर होते हैं या उसका उत्तर हासिल करने के लिए अपनी खुद की समझ का इस्तेमाल करते हुए उससे जूझते हैं |

मेरी गणित की कक्षा में भी ऐसा ही कुछ हुआ। हम कक्षा 6 में संख्याओं पर संक्रियाओं की बात कर रहे थे। पाठ्यपुस्तक में योग के गुणधर्म बताये गए हैं। इन गुणधर्मों को जो कि क्रम विनिमय, साहचर्य, तत्समक आदि है इन्हे समझाना था। जोड़ घटाना गुणा भाग के सवाल इन बच्चों को हल करना खूब आता था पर इस अध्याय में तो नियमों को समझना था। मैंने सोचा इन नियमों को अपनाने या मान लेने से पहले कुछ सरल नियम बच्चों को खुद बनाना आना चाहिए। क्या वे कुछ उदाहरणों के आधार पर सामान्यीकरण कर, कोई दावा या कथन बना सकते है ? इसके लिए मैंने उनसे चर्चा शुरू की। मुझे यह सूझा कि यह बात करें कि क्या हम किसी संख्या को दो संख्या के जोड़ के रूप में देख सकते हैं। तो, मैंने बच्चों के बीच सवाल उठाया कि क्या किसी संख्या को दो अन्य संख्याओं के जोड़ के रूप में बताया जा सकता है ?

मै बोर्ड पर एक संख्या लिख रहा हूँ आप इसे दो संख्याओं के जोड़ की तरह बताओ। मैंने एक छोटी संख्या लिखी 10। बच्चों को यह समझने में थोड़ी देर लगी कि मै उनसे क्या सवाल पूछ रहा हूँ? समझाने के लिए मैंने कुछ उदाहरणों का सहारा लिया। जैसे 10 को हम 8+2 =10 या 6+4 = 10 लिख सकते हैं, इसी तरह और कौन कौनसी दो और संख्यांओं के जोड़ से 10 बनता है, बच्चों को बात समझ में आई और उन्होंने बताना शुरू किया। मैंने उनके बताये हुए समूहों को बोर्ड पर लिखा और उन्हें प्रोत्साहित किया कि वे सभी संभव युग्मों को सोच

पाएं, कुछ देर तो वे बिना क्रम के कोई भी दो संख्या बोल रहे थे जैसे 7+3 या 2+8। फिर उन्होंने सहज ही एक क्रम खोज लिया

10= (6+4) ,(7+3) ,(8+2), (9+1) ,(5+5), (4+6), (3+7) ,(2+8) ,(1+9)

7= (6+1) ,(5+2), (4+3) ,(3+4) , (2+5), (1+6)

8= (7+1) ,(6+2), (5+3) , (3+5), (2+6) ,(1+7)

9=(8+1) ,(7+2) ,(6+3), (5+4) , (4+5), (3+6) ,(2+7) ,(1+8)

हरेक संख्या के लिए बने इन युग्मों/ जोड़ों की कुल संख्या कितनी है ? यह हमने गिनकर देखा संख्या 10 के लिए 9 जोड़े बने है, संख्या 7 के लिए 6, एवं 8 के 7 तथा 9 के 8 जोड़े बने है, अब मैंने यह सवाल रखा कि अगर संख्या 15 है तो उसके लिए कितने जोड़े बनेगें, कुछ बच्चे फिर से जोड़े बनाने लग गए पर एक दो ने जल्दी ही जबाब दिया कि 15 के लिए 14 जोड़े बनेंगें। बाकी बच्चे भी उनकी बात से सहमत हो गए।

अब तक के काम और चर्चा के आधार पर हमने यह दावा/ कथन बनाया -

1. एक को छोड़कर प्रत्येक संख्या दो संख्याओं के जोड़ के रूप में बताई जा सकती है , (अभी हम 0 का जोड़ नहीं कर रहे हैं)
2. किसी संख्या के बराबर दो संख्या के युग्म या जोड़ की कुल संख्या उस संख्या से एक कम होगी .

क्या यह दोनों कथन सही है, ज्यादातर बच्चों का यह मानना था कि यह सही है पर एक बालिका ने कहा- संख्या 10 के जोड़ों में 6+4 और 4+6 में तो एक ही तरह की दो संख्याएं हैं इसी तरह 7+3 और 3+7 में भी एक ही तरह की संख्याएं हैं। हम सभी उसकी बात से सहमत हुए। अब हमने इस तरह समान संख्याओं से बनने वाले जोड़े हटा दिए और बने हुए कुल युग्मों की संख्या गिनी साथ ही कुछ और संख्याओं के लिय जोड़ के युग्म बनाए।

7= (6+1) , (5+2), (4+3)। तीन

8= (7+1) , (6+2), (5+3) , (4+4) चार

9=(8+1) , (7+2) , (6+3), (5+4) चार

10= (9+1), (8+2) ,(7+3) ,(6+4), (5+5) पांच

11=(10 +1) (9 +2) (8 +3) (7 +4) (6 +5) पांच

12=(11 +1) (10 +2) (9 +3) (8 +4) (7 +5) (6+6) छह

13= (12+1) (11+2) (10+3) (9+4) (8+5) (7+6) छहः

बोर्ड पर लिखी संख्याओं और उनके लिए बने जोड़ के युग्मों को देखकर हम क्या कोई कथन बना सकते है ? बच्चें सोचकर अलग अलग कथन बोलते रहे। इन सब में संख्या से उसके जोड़े आधे के करीब होने का अभिप्राय था। भाषा ठीक से बन नहीं रही थी पर उन्हें समझ आ रहा था।

चूंकि मैं भी संख्याओं को पहली बार इस तरह से देख रहा था तो मुझे ज्यादा उतावलापन था। मैंने तुरत ही अगला सवाल रखा कि- क्या किसी संख्या को दो संख्याओं के अंतर या घटाव के रूप में बताया जा सकता है ?

10 को दो संख्या के घटाव की तरह बताओ?

हमने देखा -

10= 11-1, 12-2 13-3 14-4 15-5 16-6 आदि-आदि इस तरह तो हम कितने ही आगे जा सकते है

15= 16-1, 17-2, 18-3, 19-4, ----------------

5= 6-1, 7-2, 8-3, 9- 4, 10-5, 11-6, इस तरह आगे बढ़ते ही जाएंगे

अब इसके लिए दावा या कथन बनाने की बारी थी, यह कथन हम सब ने मिलकर बनाया .

किसी भी संख्या को दो संख्याओं के घटाव से बताया जा सकता है और हर संख्या के लिए घटाव के बहुत सारे युग्म हो सकते हैं कक्षा मै मोजूद सभी बच्चे इस कथन पर सहमत थे जब जोड़ और घटाव से किसी संख्या को व्यक्त किया जा सकता है

तो स्वाभाविक रूप से अगला प्रश्न हमारे दिमाग़ में यह आया कि- क्या किसी संख्या को दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है?

1 को नहीं

2 को 2*1

3 को 3*1

4 को 4*1 और 2*2

यहीं हमने यह बात की कि 1 से गुणा करने पर तो वही संख्या प्राप्त होती है और प्रत्येक संख्या को उसी संख्या के एक और गुणनफल के रूप में बताया जा सकता है, इसलिए 1 के गुणन को हम नहीं मानेंगे। अब हमने फिर से और संख्याएं लिखीं और एक एक संख्या पर बात करते गए।

1 को नहीं 11 नहीं

2 को नहीं 12 =2*6,4*3

3 को नहीं 13 नहीं

4 = 2*2 14=2*7

5 को नहीं 15 =5*3

6= 2*3 16=2*

7 नहीं 17=नहीं

8 =4*2 18=9*

9 =3*3 19 नहीं

10=5*2 20=10*2 ,5*4

अब हमने सोचा कि क्या अब तक हम कोई दावे लायक पैटर्न देख पा रहे हैं ?

बच्चों ने कहा - कुछ संख्याओं को हम दो संख्याओं के गुणन से लिख सकते है और कुछ को नहीं।

अगला काम हमने तय किया की हम देखने की कोशिश करते हैं कि कौन-कौन सी संख्याओं को हम दो संख्याओं के गुणन के रुप में नहीं लिख सकते? सुविधा के लिए मैंने संख्याओं को नीचे की तालिका जैसे लिख दिया।

1	2
3	4
5	6
7	8
9	10
11	12
13	14
15	16
17	18
19	20
21	22
23	24
25	26
27	28
29	30
31	32
33	34
35	36
37	38 क्रमशः

इस तरह की जमावट से सोचने में आसानी हो गई | एक बच्चे का ध्यान इस पर गया की दूसरी पंक्ति की ये सब संख्याएं 2 के पहाड़े में आती है | मैंने इसमें जोड़ा की पहाड़े का मतलब तो गुणा ही है जैसे 2*5 =10 या 2*32=64। इसका मतलब यह कि इस पंक्ति की संख्याओ को दो संख्याओ के गुणन के रूप में लिख सकते हैं। हमने 100 में से 50 संख्याएं ऐसी पा ली जो दो के गुणज की तरह लिखी जा सकती थीं। इनमे से 2 हमारे 2*1 के नियम में आती थी इसे छोड़ने पर हमें 49 संख्या मिल गई जिन्हें हम 2 के गुणे के रूप में लिख सकते थे |

अब हमें पहली पक्ति को ध्यान से देखना था। मैंने बच्चों से पूछा की क्या हम इस पंक्ति की इन सभी संख्याओं को दो संख्याओं के गुणन के रूप में नहीं लिख सकते? हम 9 और 15 को तो पहले ही 3 के गुणन के साथ लिख चुके थे। हमने तय किया की इस पक्ति में कुछ संख्याएं हैं जो 3 के पहाड़े में

आती हैं। इन्हें और इन जैसी और को कैसे अलग किया जाए? क्या इस पंक्ति को कुछ अलग तरह से जमाया जा सकता है ? कुछ देर सोचने और दो तीन तरह से जमावट करने के बाद हमें एक तरीका मिल गया। हमने इस पूरी पंक्ति को क्रमशः 3 लाइनों में डाल दिया

1	3	5
7	9	11
13	15	17
19	21	23
25	27	29
31	33	35
37	39	41
43	45	47
49	51	53
55	57	59
61	63	65
67	69	71
73	75	77
79	81	83
85	87	89
91	93	95
97	99	

अब बीच की पंक्ति की संख्याओ को हम 3 के पहाड़े की तरह देख सकते थे जो कि 3 के गुणज के रूप में थी। हमने 3 के नीचे की इन 16 संख्याओं को गुणन संख्याओं के रूप में माना| इस तरह हमें 16 संख्याएँ और मिल गई अब तक 49+16=65 संख्याएँ हो गई थीं जिन्हें हम दो संख्या के गुणन के रूप में लिख सकते थे। अब हमने बीच के पक्ति को हटा दिया, और पहली पंक्ति को जब हम ध्यान से देख रहे थे तभी हमें संख्या 25 दिखी जो की 5 की गुणज थी। 5 की गुणज वाली और भी संख्याएँ हम देख पा रहे थे। अभी तक हमें पक्तियों में जमावट के आधार पर संख्याओं को गुणन के रूप में देखने का एक पैटर्न मिला था और हम उसे और आगे बढाना चाहते थे | हमने अब सोचा कि इन्हें कैसे जमाएं कि ये सब एक लाइन में आ जाएं। हमारे पास दो पंक्तियां थीं। थोड़ी माथा पच्ची के बाद हमें एक तरीका मिल गया।

हमने पहली पंक्ति की 5 संख्याएं आड़ी जमाईं। उसके नीचे 5 के नीचे आने वाली पंक्ति की 5 संख्याओं को आड़ा जमाया (पहली 5 छोड़कर) इस तरह की जमावट से हमें एक नया पेटर्न मिला। इस जमावट से एक ही इकाई वाली संख्याएँ एक पक्ति में आ गईं, और इस तरह 5 के गुणज भी एक पंक्ति में आ गए।

1	7	13	19	25
11	17	23	29	35
31	37	43	49	55
41	47	53	59	65
61	67	73	79	85
71	77	83	89	95
91	97			

इस तरह हमारे पास अब अंतिम पक्ति में 5 के गुणज थे। इन 6 संख्याओं को हम हटा सकते थे। अब तक हमने (65+6= 71) संख्याओं को हटा दिया था।

सब बच्चे और मैं खूब रोमांचित थे। हमें मज़ा आ रहा था, थोडा रुककर अभी तक हमने क्या किया इस पर हमने चर्चा की।

हम किसी संख्या को दो संख्याओं के गुणज के रूप में व्यक्त करना चाहते थे:

1 की गुणज तो सभी संख्याए है

2 की गुणज वाली संख्याएँ हमने पहली जमावट से अलग करीं

3 की गुणज वाली बाकी संख्याएँ भी दूसरी जमावट में अलग हुईं.

4 की गुणज वाली संख्याओं के बारे में बच्चों से बात की और यह सहमती बनी कि जो संख्या 4 की गुणज होगी वह दो की भी गुणज होगी जैसे 3*4=12 वही है जो 6*2=12 इस तरह 4 की गुणज वाली संख्याएँ भी पहली जमावट में हट गई हैं

5 की गुणज की संख्याएँ तीसरी बार की जमावट में अलग हो गई।

6 की गुणज की संख्याएँ 2 और 3 के गुणज में भी आएँगी जैसे 3*6 =18, 18 को हम 2 के गुणज 9*2 और 3 के गुणज 6*3 की तरह भी लिख सकते हैं, इस तरह 6 के गुणज वाली संख्याएं भी हट चुकी हैं |

अब 7 के गुणज की बारी थी, हमने चर्चा से समझा कि 7 के दूसरे तीसरे चौथे पाँचवें और छटवें गुणज तो इस तरह की जमावट में हट ही गये हैं।

अब 7 का सातवाँ गुणज 7*7= 49

7 का 11 वाँ गुणज 7*11= 77

7 का 13वाँ गुणज 7*13=91 बचा है

इन तीन संख्याओं को हटाने का जमावट वाला कोई तरीका नहीं मिल रहा था। पर इन 3 संख्याओ को भी हमने अपनी सूची में शामिल कर लिया (71 +3=74)। अब 100 तक की संख्याओं में से हमारे पास कुल 26 ऐसी संख्याएं थीं, जिन्हें हम दो संख्याओं के गुणज के रूप में नहीं बता सकते थे, यह हमारे लिए बड़ी सफलता थी कि 1 से 100 तक में से केवल 26 संख्याएँ बची हुई थीं जिन को हम दो संख्याओं के गुणन से नहीं पा सकते थे |

यहाँ जब हम 7 के गुणज को खोज रहे थे तब हमें एक दिलचस्प बात समझ आई, हमें एक नया सूत्र मिल गया। हम 7 का गुणा उन्हीं संख्याओं से कर रहे थे जो हमारी इन पक्तियों में बची हुई थीं। हमने इस बात पर विचार किया इन शेष संख्याओं के आपसी गुणन से प्राप्त गुणनफल वाली संख्याओं को अगर हम हटा दें तो हमारे पास केवल वही संख्याएं बचेंगी जो किन्हीं भी दो संख्यों का गुणनफल नहीं हैं। इस समझ पर सहमति बनते ही हम उत्साह से भर गए। हमारे पास एक नया सुप्रीम दावा था।

इन चार पंक्तियों की जमावट में जो संख्याएं हैं उनमें से हरेक संख्या का आपस में गुणा करने पर जो संख्याएँ आयेंगी, उन सारी संख्याओं को अगर हम हटा दें तो हमें वे संख्याएँ मिल सकती है जिन्हें दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में नहीं बताया जा सकता।

यह काम इतना जुनूनी हो गया था कि मैं और बच्चे इसे छोड़ना नहीं चाहते थे।

100 तक तो हमने इस तरह की संख्याओं का पता लगा लिया था अब हमने दायरा बड़ा कर 1000 तक कर लिया।

7	11	13	19
17	31	23	29
37	41	43	49
47	61	53	59
67	71	73	79
77	91	83	89
97	101	103	109
107	121	113	119
127	131	133	139
137	151	143	149
157	161	163	169
167	181	173	179
187	191	193	199
197	211	203	क्रमशः

हमने पहले एक पंक्ति को लिया जिसमे 7 की इकाई वाली संख्याए थीं। मैंने बच्चों से पूछकर यह तय किया कि 7 की इकाई वाली संख्याओं में 1 इकाई वाली संख्याओं का गुणा करते हैं जैसे 7*11 =77। ऐसा करने पर हमें 7 की इकाई वाली संख्याएँ ही मिलीं। इस तरह हम इन दोनों पंक्तियों का आपस में गुण करते गए यह काम तब तक ही किया जब तक कि प्राप्त गुणनफल 1000 के अन्दर रहे। क्या और किसी पंक्ति के आपसी गुणन से 7 की इकाई वाली संख्याएं मिल सकती हैं?

एक बच्चे ने बताया की 13 वाली पंक्ति और 19 वाली पंक्ति का गुणा करने पर भी 7 की इकाई वाली संख्याएं मिलेंगी। इस बात से हम सब सहमत थे। हमने बच्चों के समूह बनाए और मिशन गुणनफल की शुरुआत की।

7*11=77	19*13=247
17*11=187	29*13=377
37*11=407	49*13=637
47*11=517	59*13=767
67*11=737	--
77*11=847	19*23=437
--	29*23=667
7*31=217	--
17*31=527	19*43=817
7*41=287	--
17*41=697	--
7*61=427	--
7*71=497	--
7*101=707	--
7*131=917	--

ये सभी संख्याए दो संख्याओ के गुणज से प्राप्त हो रही थीं, जिन्हें हमने 7 वाली पंक्ति में मार्क कर दिया। अब 11 वाली पंक्ति की बारी थी। बच्चों ने तय करके बताया कि 11 वाली पंक्ति में इसी पंक्ति की संख्याओं का आपस में गुणा करने पर 1 इकाई वाली संख्या ही आएगी जैसे 11*11=121, 31*11=341 । मैंने बच्चों को बताया कि 7 इकाई वाली पंक्ति में 3 इकाई वाली पंक्ति का गुणा करने पर भी 1 की इकाई वाली संख्याएं ही मिलेंगी। और 9 की इकाई वाली में 9 की इकाई वाली पंक्ति का गुणा करने पर भी 1 इकाई वाली संख्याएं मिलेंगी। अब हमारी टीम फिर जुट गई और उन्होंने यह गुणज भी निकाल दिए।

13*7=91	11*11=121	19*19=361
23*7=161	11*31=341	19*29=551
43*7=301	11*41=451	29*29=841
53*7=371	11*61=671	49*19=931
73*7=511	11*71=781	--
83*7=581	--	--
103*7=721	31*31=961	--
113*7=791	--	--
133*7=931	--	--
13*17=221	--	--
23*17=391	--	--
43*17=731	--	--
53*17=901	--	--
13*37=481	--	--
23*37=851	--	--
13*47=611	--	--
13*67=871	--	--

जो ये संख्याएं मिलीं उन्हें इस एक इकाई वाली पंक्ति में मार्क कर लिया गया। अभी हम थके नहीं थे हमें 3 इकाई वाली और 9 इकाई वाली संख्याओं की छँटनी करनी थी।

विमर्श से तय हुआ की 13 वाली पंक्ति में 11 वाली पंक्ति और 19 वाली पंक्ति में 7 वाली पंक्ति का गुणा करें तो हमें 3 इकाई वाली संख्याएं मिलेंगी। हमारे मिशन गुणनफल से ये संख्याएं निकल कर आईं।

11*13=143	7*19=133
11*23=253	7*29=203
11*43=473	7*49=343
11*53=583	7*59=413
11*73=803	7*79=553
11*83=913	7*89=623
31*13=403	7*109=763
31*23=713	7*119=833
41*13=533	7*139=973
41*23=943	17*19=323
61*13=793	17*29=493
71*13=923	17*49=833
--	37*19=703
--	47*19=893

इन संख्याओं को चिह्नित करने के बाद इन 1000 तक की संख्याओं में अब केवल 9 इकाई वाली पंक्ति में ही ऐसी संख्याएं बची थीं जो दो संख्याओं के गुणनफल से आ सकती

थीं। इनके लिए क्यों रुकना, 13*13 और 19*11 और 7* 7 करने पर ऐसी संख्याएं आएँगी जिनकी इकाई में 9 है तो इन पंक्तियों के लिए मिशन गुणनफल फिर शुरू हो गया।

7*7=49	17*17=289	13*13=169
17*7=119	37*17=629	13*23=299
37*7=259	47*17=799	13*43=559
47*7=329	--	13*53=689
67*7=469	11*19=209	13*73=949
77*7=539	11*29=319	23*23=529
97*7=679	11*49=539	23*43=989
107*7=749	11*59=649	--
127*7=889	11*79=869	--
137*7=959	11*89=979	--
--	31*19=589	--
--	31*29=899	--
--	41*19=779	--

इन संख्याओं को मार्क करने के बाद अब हमारे पास 1000 तक की केवल वही संख्याएं बची थीं जो कि किसी तरह भी दो अलग संख्याओं के गुणनफल से प्राप्त नहीं हो सकती थीं। यह हमारे लिए बड़ी उपलब्धि थी। पर हमारा खेल दावा बनाने के लिए शुरू हुआ था। जमावट का यह चार्ट बनाकर हमने अपनी कक्षा की दीवार पर लगा दिया। क्या इन संख्याओं को हम अभाज्य संख्या भी कह सकते हैं? इस पर थोड़ी बातचीत हुई और सहमति बनीं। इसे देखकर हमने कितने ही नए दावे या प्रश्न बनाएं जैसे:

11	13	17	19
	23		29
31		37	
41	43	47	
	53		59
61		67	
71	73		79
	83		89
		97	
101	103	107	109
	113		
		127	
131		137	139
			149
151		157	
	163	167	
	173		179
181			
191	193	197	199
211	223	227	229
	233		239
241			
251		257	
	263		269
271		277	

281	283		
	293		
		307	
311	313	317	
331		337	

--	--	347	349
--	353	--	359
--	--	367	--
--	373	--	379
--	383	--	389
--	--	397	--
401	--	--	409
	--	--	419
421	--	--	--
431	433	--	439
--	443	--	449
--	--	457	--
461	463	467	--
--	--	--	479
--	--	487	--
491	--	--	499
--	503	--	509
--	--	--	--
521	523	--	--

--	--	--	--
541	--	547	--
--	--	557	--
--	563	--	569
571	--	577	--
--	--	587	--
--	593	--	599
601	--	607	--
--	613	617	619
--	--	--	--
631	--	--	--
641	643	647	--
--	653	--	659
661	--	--	--
--	673	677	--
--	683	--	--
691	--	--	--
701	--	--	709
--	--	--	719
--	--	727	--
--	733	--	739
--	743	--	--
751	--	757	--
761	--	--	769
--	773	--	--
--	--	787	--
--	--	797	--
--	--	--	809
811	--	--	--
821	823	827	829
--	--	--	839
--	--	--	--
--	853	857	859
--	863	877	--
881	883	887	--
--	--	--	--
--	--	907	--
911	--	--	919
--	--	--	929
--	--	937	--
941	--	947	--
--	953	--	--
--	--	967	--
971	--	977	--
--	983	--	--
991	--	997	--
--	--	--	--

1. लगातार आने वाली वे 19 संख्याएं कौनसी हैं, जिन्हें 2 संख्याओं के गुणन से प्राप्त किया जा सकता है?
2. 10 से 1000 के बीच इकाई के स्थान पर 1 वाली केवल 30 संख्याएं ही हैं जो कि अभाज्य हैं, क्या यह दावा सही है?
3. क्या हर 100 संख्याओं के बीच आने वाली अभाज्य संख्याओं की संख्या बराबर हैं?

इस जमावट को और तालिका को देखकर आप भी कुछ नए दावे या प्रश्न बना सकते हैं जो आपने पहले कभी नहीं सोचें हो या आपको पहली बार इस तालिका को देखकर सूझ रहे हों?

इसे लेख को पढ़कर कोई यह कह सकता है कि यह सब तो सुन्दरम या अरोस्थेनिक ने पहले ही बता दिया है| इसमें नया क्या है? इसके जबाब में मै यह कहूँगा कि इस कक्षा के लिए यह हमारा मौलिक काम था जो बच्चों के साथ मिलकर शिक्षक के रूप में मैंने किया था। यह संख्याएं जमावट के जरिये हासिल हुई थीं| इकाइयों के आधार पर बनी नई जमाबट एक नया और सुंदर पैटर्न थीं।

यह बात अक्सर कही जाती है कि बच्चों को सीखने में तभी मज़ा आएगा जब शिक्षक को भी आनंद आए। और यह तभी होगा जब शिक्षक और बच्चे दोनों मिल कर कुछ चुनौती में पड़ेंगे या कुछ खोजेंगे। और जो खोजा जाएगा वह बच्चों के साथ शिक्षक के लिए भी नया होगा। इस पैटर्न को हासिल करने में बच्चे और मैं बराबरी से ज़ूझ रहे थे और हमें इस उपलब्धि तक पहुंच कर मजझा भी बराबर का ही आया ।

एन सी एफ 2023 में भी खुले प्रश्नों व कम्पयूटेश्नल थिंकिंग की बात कही है| 2005 के एन सी एफ ने गणितीयरण और संख्याओं व अन्य गणितीय आब्जैक्ट से नयी-नयी खोजबीन करने अपने सवाल बनाने व नये पैटर्न ढूंढ़ने की बात की थी,

इसके साथ-साथ आजकल कई शोध सीखने-सिखाने में शैक्षिक जोखिम के महत्त्व की बात करते हैं। याने सीखने के ऐसे टास्क और ऐसे सवाल जिनके हल आपके पास पहले से मौजूद नहीं हैं। एकेडमिक रिस्क टेकिंग (Sara Abercrombie, Kira J. Carbonneau, Carolyn J. Hushman , 2022) में बताया गया है इस तरह की शैक्षणिक गतिविधियाँ जिनमें पहले से तय उत्तर नहीं होते उनका सामना करना, उनसे जूझना होता है। इसमें असफलता का खतरा तो होता है लेकिन यह मौलिक तरीके से सीखने में अहम भूमिका निभाते हैं। इसमें प्रश्न को समझने के लिए प्रश्न पूछना, अपने विचारों को साझा करना या चुनौतिपूर्ण समस्याओं को हल करने का प्रयास करना शामिल है। मेरी कक्षा में संख्याओं के साथ खोजबीन की यह गतिविधि शायद इसी तरह का एक उदाहरण है। इस तरह के खुलेपन के कई और रूप हो सकते हैं।

मै अपने शिक्षण के प्रारंभिक दौर में एक रचनात्मक प्रशिक्षण का हिस्सा बना था। इस अलग तरह के प्रशिक्षण ने मेरी शिक्षण प्रक्रियाओं में एक प्रायोगिक नवाचारी और रिस्क टेकिंग दर्ष्टिकोण अपनाने का आधार दिया | यह स्कूली शिक्षा में काम करने वाली एक स्वैच्छिक संस्था एकलव्य का प्राथमिक शिक्षा कार्यक्रम (प्राशिका) था जो कुछ वर्षों तक मेरे स्कूल के बच्चों और मेरे साथ रहा | इसमें हम शिक्षकों ने बच्चों के सीखने की प्रक्रियाओं को और स्कूली शिक्षा के विषयों को एक तरह से शोध और खोज कि तरह विकसित और आत्मसात किया था, इसलिए संख्याओं की यह जमावट मुझे मेरी कक्षा के बच्चों की खोज और उपलब्धि का अहसास देती है |

संदर्भ

NCF 2005 - Mathematization

NCF 2023- Critical Thinking

Abercrombie Sara, Carbonneau Kira J., Hushman Carolyn J. (2022): Examining Academic Risk Taking: Conceptual Structure, Antecedents, and Relationship to Productive Failure, Contemporary Educational Psychology Elservier (2022)

KIRMIZ Mehmet I, QUANSAH Abigail, BUBER Zafer (2024), Benefits of Risk-Taking in Teaching Mathematics; Journal of Humanistic Mathematics, Vol. 14, Issue 1, January 2024

Lake Elizabeth (2019) Playing it Safe' or 'Throwing Caution to the Wind': Risk-Taking and Emotions in a Mathematics Classroom, LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education, 2019