

गणित शिक्षणशास्त्र*

विद्यालयी शिक्षा में गणित एक महत्वपूर्ण स्थान रखता है। प्रारंभिक स्तर पर, यह एक अनिवार्य विषय है। बहुत से लोग यह मानते हैं कि यह बच्चों के भीतर डर, भय और तनाव पैदा करता है। हालाँकि, कक्षा के अवलोकन, अक्सर इस ओर इशारा करते हैं कि इस विषय का शिक्षण तनाव को पैदा करता है। इस सरोकार को संबोधित करने के मद्देनज़र, यह मॉड्यूल विद्यार्थी-केंद्रित शिक्षण के माध्यम से प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर के बच्चों में, गणित में दक्षता और कौशल विकसित करने पर ज़ोर देता है, जिसमें मूल्यांकन को समेकित किया गया है और इसमें विभिन्न क्षमताओं वाले सभी बच्चे कक्षा के तनावमुक्त वातावरण में शामिल होते हैं।

अधिगम के उद्देश्य

इस मॉड्यूल के अध्ययन के बाद अध्यापक—

- मूल्यांकन सहित शिक्षण की उन कार्यनीतियों के बारे में, जो बच्चों को अधिगम में संलग्न करने के लिए अपनायी जा सकती हैं, को जानने एवं प्रयोग करने में सक्षम होंगे।
- राज्य की पाठ्यचर्चा के साथ अधिगम परिणामों में दी गई दक्षताओं और कौशलों का संबंध जानने में सक्षम होंगे।
- कक्षा स्तर के अधिगम परिणामों को प्राप्त करने में बच्चों की मदद करने के लिए उचित शैक्षणिक विज्ञान की प्रक्रियाओं का संचालन करने में सक्षम होंगे।

- सभी बच्चों द्वारा अधिगम प्रगति को निरंतर सुनिश्चित करने के लिए शिक्षण प्रक्रियाओं के साथ मूल्यांकन को एकीकृत करने में सक्षम होंगे।

गणित की प्रकृति को समझना

गणित ने हमें विचारों को निर्धारित करने, सटीक होने और हमारे दैनिक जीवन में स्थानिक अवधारणाओं का उपयोग करने में मदद की है। इसे प्राकृतिक विज्ञान, इंजीनियरिंग, चिकित्सा और सामाजिक विज्ञान सहित कई क्षेत्रों में एक आवश्यक उपकरण के रूप में दुनिया भर में उपयोग किया जाता है। गणित न केवल दैनिक जीवन की स्थितियों में मदद करता है, बल्कि तर्क, अमूर्त चिंतन और कल्पनाशीलता को भी विकसित करता है। इस प्रकार, विद्यालयी पाठ्यक्रम में इसका एक महत्वपूर्ण स्थान है और दसवीं कक्षा तक यह एक अनिवार्य विषय के रूप में पढ़ाया जाता है।

स्कूली गणित शिक्षा की कुछ समस्याएँ

- बच्चा— जब मैं दो प्राकृतिक संख्याओं को आपस में गुणा करता हूँ तो गुणनफल दोनों संख्याओं से बड़ा होता है, लेकिन जब मैं दो भिन्नों को गुणा करता हूँ तो गुणनफल छोटा होता है। मैं समझ नहीं पाता हूँ कि क्यों?
- बहुत से बच्चे गणित से डरते हैं और इस विषय में असफलता से भयभीत रहते हैं। वे जल्दी ही गणित की गंभीर पढ़ाई से विमुख हो जाते हैं।

*निष्ठा— स्कूल प्रमुखों और शिक्षकों की समग्र उन्नति के लिए राष्ट्रीय पहल—प्रशिक्षण पैकेज, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा 2019 में प्रकाशित।

- यह पाठ्यचर्या केवल इससे विमुख होने वालों के लिए ही निराशाजनक नहीं है, बल्कि यह प्रतिभाशाली बच्चों के लिए भी कोई चुनौती नहीं पेश करती।
- समस्याएँ, अभ्यास व मूल्यांकन पद्धति यांत्रिक और दुहरावग्रस्त हैं। इसमें संगणना पर अत्यधिक ज़ोर दिया गया है। इसमें स्थानिक चिंतन जैसे गणितीय क्षेत्रों को पर्याप्त स्थान नहीं दिया गया है।
- अध्यापकों में आत्मविश्वास व तैयारी की कमी है और उन्हें आवश्यक मदद भी नहीं मिल पाती।

(राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005)

पूर्व-प्राथमिक (विद्यालय-पूर्व) स्तर पर बच्चों के बीच संख्यात्मक कौशल विकसित करना

- संख्या-पूर्व कौशल— वर्गीकरण, श्रेणीबद्धता, क्रमबद्धता और प्रत्येक में अलग-अलग संचार (व्यवहार) ऐसे कौशल हैं जो संख्यात्मक कौशल और क्षमताओं के विकास का आधार बनते हैं।
- बच्चों से अपेक्षित है कि वे वस्तुओं की गिनती करने से पहले संख्या-पूर्व कौशल में सक्षम हों। एक बच्चे को संख्या-पूर्व कौशलों को मजबूत करने के लिए पर्याप्त समय और अवसर दिए जाने चाहिए। बच्चे के साथ वस्तुओं के वर्गीकरण (एक या एक से अधिक विशेषताओं के आधार पर), मूर्त वस्तुओं के क्रम (अलग-अलग तरीकों से) और प्रत्येक से अलग-अलग संचार से संबंधित प्रायोगिक गतिविधियाँ की जानी चाहिए, क्योंकि वे कौशल उस बच्चे के लिए एक आधार बनाते हैं जो गिनना सीख रहा है।
- पूर्व-प्राथमिक स्तर पर आप अपने बच्चे के शुरुआती गणित कौशल और क्षमताओं को विकसित करने में निम्नलिखित तरीकों से मदद

कर सकते हैं, जैसे— संख्या बोध कराना (आगे और पीछे की गिनती सटीक रूप से करने की क्षमता और बुनियादी कार्यों के माध्यम से संख्याओं के बीच संबंधों को देखना); संख्या को दर्शाना (शब्दों, चित्रों, प्रतीकों और वस्तुओं का उपयोग करके, जैसे— ब्लॉक, कंकड़ आदि); स्थानिक बोध (आकृति, आकार, स्थान, स्थिति, दिशा और आवागमन का विचार); माप (अपने तरीके से उपयोग द्वारा और बाद में इकाइयों का उपयोग करके लंबाई, ऊँचाई, वजन और समय का पता लगाना); अनुमान (किसी चीज़ की राशि या आकार के बारे में अच्छा अनुमान लगाने की क्षमता); पैटर्न (संख्याओं, आकृतियों, चित्रों की व्यवस्था, जो एक तार्किक तरीके से दोहराए जाते हैं) और समस्या-समाधान (समस्या के द्वारा सोचना और यह पहचानना कि एक ही उत्तर प्राप्त करने के एक से अधिक तरीके हो सकते हैं)।

- बच्चों में उपरोक्त क्षमताओं को विकसित करने में मदद करने के लिए यह आवश्यक है कि बच्चों को जो अनुभव घर से मिलते हैं, उनका उपयोग कृत्रिम परिस्थितियों को बनाने के बजाय बेहतर तरीके से हो। उदाहरण के लिए, वर्गीकरण की क्षमता के लिए, बच्चों को अवसर प्रदान किए जाने चाहिए।
- ऐसे अवसर जिसमें वे वस्तुओं, लोगों और सामग्रियों का वर्गीकरण कर सकें। सबसे पहले दो समूहों में स्पष्ट रूप से अवलोकन करने योग्य विशेषताएँ सामने रखीं जाएँ, जैसे— रंग और आकार, बाद में उन्हें अधिक समूहों में विभाजित कर थोड़ी जटिल विशेषताओं पर वर्गीकृत करने के लिए कहा जाए, जैसे— आकार, स्थिति, अभिविन्यास इत्यादि।

इससे हमारे सामने एक महत्वपूर्ण प्रश्न आता है कि विद्यालयी स्तर पर गणित की शिक्षा का मुख्य लक्ष्य क्या है? क्या हम केवल विद्यार्थियों में संख्यात्मक कौशल विकसित करना चाहते हैं और उन्हें रोज़गार योग्य वयस्क बनाना चाहते हैं क्या हम उन्हें सोचने वाले ऐसे व्यक्ति बनाना चाहते हैं जो लंबे समय तक समाज के सामाजिक और आर्थिक विकास में योगदान देंगे? समाज में चिंतनशील व्यक्तियों के विकास के लिहाज़ से विद्यालयी स्तर पर गणित शिक्षण का बहुत अधिक महत्व है।

इस मॉड्यूल में हम उन तरीकों पर चर्चा करने जा रहे हैं जिनसे हम विद्यार्थियों को गणित के बारे में विचार करने और उनकी प्रक्रियाओं को समझने में मदद कर सकते हैं। आइए, इस सवाल के साथ शुरू करें कि ‘गणित क्या है?’। गणित शब्द का अंग्रेज़ी मूल मैथमेटिक्स, दरअसल ग्रीक शब्द ‘मेथमा’ से लिया गया है, जिसका अर्थ है विज्ञान। ऑक्सफ़ोर्ड डिक्शनरी में गणित को “स्थान, संख्या और मात्रा के विज्ञान” के रूप में परिभाषित किया गया है। मुख्य रूप से गणित माप, पैटर्न और समरूपता की जाँच

के अध्ययन का एक तरीका है। इस पद्धति में चर्चा की जाने वाली अवधारणाओं की परिभाषाओं का सावधानीपूर्वक निर्माण और मान्यताओं का एक स्पष्ट विवरण प्रस्तुत किया गया है जो तर्क का आधार बनाते हैं। इन परिभाषाओं और मान्यताओं से तर्क के अनुप्रयोग द्वारा निष्कर्ष निकाले जाते हैं।

प्राथमिक स्तर पर गणित

एक समाज के रूप में, हमें इसकी सराहना करनी चाहिए कि समग्र रूप से समाज के लिए प्राथमिक विद्यालय के अध्यापक का काम कितना महत्वपूर्ण है। प्राथमिक अध्यापक एक बड़ी ज़िम्मेदारी निभाते हैं और केवल वही यह अंतर बता सकते हैं कि विद्यालय के बाद के वर्षों में बच्चा कैसे और क्या सीखता है। प्राथमिक स्तर पर शिक्षण के लिए एक विशिष्ट प्रकार की विशेषज्ञता की आवश्यकता होती है जिसमें ज्ञान और कौशल दोनों शामिल होते हैं। इस तरह की विशेषज्ञता एक लंबी समय अवधि में प्राप्त की जाती है और किसी काम के बारे में सोचने और किसी शिक्षण में सुधार के लिए निरंतर प्रयास करने के माध्यम से प्राप्त की जाती है। इस स्तर पर बच्चों की सोच मूर्त वस्तुओं के आसपास प्रमुख

इसकी अपनी स्वयं की भाषा है। उदाहरण के लिए, गणितीय अवधारणाओं के पद, प्रतीक, सूत्र और सिद्धांत

इसका ज्ञान पूरे ब्रह्मांड में हर जगह और हर समय एक जैसा रहता है।

इसमें आगमनात्मक और निगमनात्मक तर्क शामिल हैं और सार्वभौमिक रूप से किसी भी प्रस्ताव को सामान्य किया जा सकता है।

गणित की प्रकृति

यह एक सटीक विज्ञान है। इसका ज्ञान हमेशा स्पष्ट, तार्किक और व्यवस्थित होता है और इसे आसानी से समझा जा सकता है।

इसमें अमूर्त अवधारणाओं का मूर्त रूप में रूपांतरण शामिल है। इसके ज्ञान को, विज्ञान और इसकी विभिन्न शाखाओं के अध्ययन में लागू किया जात है।

रूप से घूमती है जो उनके परिचित संदर्भों में भी मौजूद है। इस प्रकार, सभी शिक्षण-अधिगम प्रक्रियाओं को मूर्त वस्तुओं के हेर-फेर से बच्चों को उलझाने पर ध्यान केंद्रित करना चाहिए। इस स्तर पर शिक्षणशास्त्र में विभिन्न अवधारणाओं, दक्षताओं और कौशल से निपटने के दौरान गतिविधियों के निम्नलिखित अनुक्रम शामिल हैं—

स्कूली गणित का दर्शन

- बच्चे गणित से भयभीत होने की बजाय उसका आनंद उठाएँ।
- बच्चे महत्वपूर्ण गणित सीखें; गणित में सूत्रों व यांत्रिक प्रक्रियाओं से आगे भी बहुत कुछ है।
- बच्चे गणित को ऐसा विषय मानें जिस पर वे बात कर सकते हैं; जिससे संप्रेषण हो सकता है; आपस में जिस पर चर्चा कर सकते हैं और जिस पर साथ-साथ काम कर सकते हैं।
- बच्चे सार्थक समस्याएँ उठाएँ और उन्हें हल करें।
- बच्चे अमूर्त का प्रयोग संबंधों को समझने, संरचनाओं को देख पाने और चीजों का विवेचन करने, कथनों की सत्यता या असत्यता को लेकर तर्क करने में कर पाएँ।
- बच्चे गणित की मूल संरचना को समझें। स्कूली गणित के सभी मूल तत्व—अंकगणित, बीजगणित, रेखागणित, त्रिकोणमिति; अमूर्त की प्रणाली, संघटन और सामान्यीकरण के लिए पद्धति मुहैया कराते हैं।
- अध्यापक कक्षा में प्रत्येक बच्चे के साथ इस विश्वास के आधार पर काम करें कि प्रत्येक बच्चा गणित सीख सकता है।

(राष्ट्रीय पाठ्यचर्चा की रूपरेखा 2005)

अनुभव

गणित में नयी अवधारणा शुरू करने से पहले बच्चों को मूर्त वस्तुओं, खिलौनों और सीखने की अन्य सामग्रियों की तोड़-फोड़ से सीखने के अनुभव देना अवधारणा के प्रति उनकी रुचि बढ़ाने में सहायक होता है। इस स्तर के अनुभवों का कक्षा के कमरे के अंदर और कक्षा के बाहर की गतिविधियों के साथ मजबूत संबंध होना चाहिए। बच्चों को दिए जाने वाले कार्य अन्वेषी शैली के होने चाहिए ताकि वे अपने दैनिक जीवन के साथ सीखने से संबंध बना सकें। उदाहरण के लिए, संख्याओं को जोड़ने के लिए बच्चों को अपने आसपास से वस्तुओं के दो समूह दिए जाते हैं और वे दोनों समूहों की वस्तुओं को मिलाने के बाद फिर से गिनते हैं। प्रारंभ में एक ही प्रकार की वस्तुओं के समूह, जैसे—सेब या कोई और फल प्रदान किया जाना चाहिए ताकि वे सेबों को आपस में मिलाने के बाद इनकी कुल संख्या गिन सकें। बच्चों को ऐसे समूहों को आपस में मिलाने के बाद इसमें विश्वास हासिल करने और संख्याओं का योग पता लगाने के बाद, समस्या प्रस्तुत करने का अवसर प्रदान करें। यदि आप जानते हैं कि $235 + 367 = 602$ है, तो $234 + 369$ कितना होगा? आपको इसका उत्तर कैसे मिला? अब 5384 में किसी एक अंक को बदल दें। संख्या बढ़ी या घट गई? अब बच्चे को कुछ सामान्य गुणों वाली वस्तुओं के विभिन्न समूहों को मिलाने के लिए कहें, जैसे—लड़कों के एक समूह और लड़कियों के एक समूह को जोड़ेंगे तो विद्यार्थियों/बच्चों का समूह बन सकता है। प्रारंभ में संख्याओं का योग मिले-जुले समूह में सभी वस्तुओं को पुनः गिनने से प्राप्त होता है। बाद में बच्चे सभी वस्तुओं को पुनः गिनने के अपने तरीके विकसित कर सकते हैं।

भाषा

सभी बच्चों को शाब्दिक रूप से उनके अनुभवों, टिप्पणियों और परिकल्पना का वर्णन करने के लिए उचित अवसर प्रदान करें। इस तरह की चर्चा के दौरान बच्चे भाषा के कौशल का विकास भी करेंगे, जैसे—प्रश्नों को तैयार करना, विषय से संबंधित नए शब्दकोश और शब्दावली प्राप्त करना। उदाहरण के लिए, जब पाँच सितारों के समूह को तीन सितारों के एक समूह के साथ जोड़ा जाता है, तो अंत में प्राप्त समूह में सितारों की कुल संख्या आठ है।

चित्रात्मक प्रस्तुति

बच्चों को चित्र की व्याख्या करने और संगत जानकारी खोजने में संलग्न करें। इस तरह के चित्रों में एक समस्या और इसके समाधान भी दिखाए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए,



उच्च कक्षाओं में इससे बच्चों को गणितीय विचारों/समाधानों को आरेखीय/चित्रात्मक रूप से प्रस्तुत करने के लिए सीखने की सुविधा मिलेगी।

प्रतीक

अंत में बच्चों को प्रतीकों का उपयोग करके जानकारी दर्शाने और व्याख्या करने के अवसर प्रदान किए जाने चाहिए। उदाहरण के लिए,

$$5 + 3 = 8$$

विद्यार्थियों को प्रतीकों के रूप में उनके अवलोकनों का प्रतिनिधित्व करने और उन्हें इसके साथ अर्थ संलग्न करने के लिए प्रोत्साहित करें। साथ ही, उन्हें गणितीय व्यंजक या समीकरण बनाने के लिए

मौलिक कार्यों के संकेतों के साथ प्रतीकों को संबंधित करने के लिए प्रोत्साहित करें।

यह बच्चों को उनके विचारों को सटीक और स्पष्ट तरीके से प्रस्तुत करने में मदद करेगा। उनमें पढ़ने और लिखने से संबंधित अन्य गुणों या क्षमताओं का विकास, विचारों की अभिव्यक्ति और समस्या का समाधान एकीकृत तरीके से होगा।

गणित के साथ भाषा और पर्यावरण अध्ययन का समेकन

विद्यालय की प्रारंभिक कक्षाओं में, अर्थात् कक्षा 1 और 2 में, बच्चे केवल एक या दो भाषाओं और गणित का अध्ययन करते हैं। लेकिन आसपास के वातावरण को समझे जाने की उनकी ज़रूरत, भाषा, संप्रेषण के अच्छे साधन के रूप में और समस्या समाधान में गणितीय विचारों के उपयोग को इन दो विषयों में ही समेकित किया गया है। खासकर जब प्रारंभिक गणित का शिक्षण-अधिगम हो रहा है तो अध्यापकों का गणित, भाषा और पर्यावरण अध्ययन से संबंधित सीखने के प्रतिफल के साथ-साथ बच्चे के सर्वांगीण विकास पर ध्यान केंद्रित करना चाहिए जो कि बच्चे के संर्दृष्टि और परिवेश के उदाहरणों के माध्यम से एकीकृत तरीके से विकसित किए जाते हैं। उदाहरण के लिए, संख्याओं के बारे में बात करते समय, यह चर्चा करें कि ये संख्याएँ उनके आसपास कहाँ होती हैं; वे अपने दैनिक जीवन में संख्याओं और संख्यात्मक संक्रियाओं का उपयोग कैसे कर सकते हैं; वे संख्या का नाम और प्रतीकों का उपयोग किए बिना विभिन्न स्थितियों का वर्णन कैसे कर सकते हैं? आदि। इस तरह की चर्चा से उन्हें महसूस होना चाहिए कि गणितीय शब्दावली और प्रतीक किसी भी भाषा के मजबूत

हिस्से हैं। उदाहरण के लिए, मापों के बारे में चर्चा करते समय उपयोग की जाने वाली इकाइयाँ दैनिक उपयोग के माध्यम से विकसित की जाती हैं और किसी भी भाषा में संचार के लिए आधार बनाती हैं।

बच्चे के लिए स्कूली शिक्षा उन कई प्रश्नों के उत्तर पाने की प्रक्रिया है जो उसके मन में उठते हैं, जब वह अपने चारों ओर के वातावरण में अनुभव प्राप्त करता है। बच्चे को उसकी इस पूर्ण जिज्ञासा के साथ स्कूल के अंदर और बाहर, विषयों की सीमाओं के पार, आनंदायक अधिगम करने देना चाहिए।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित एक बड़ी चुनौती है और इसे बच्चे के अनुभव और पर्यावरण के करीब होने और अमूर्त होने की दोहरी भूमिका निभानी होती है। बच्चे अक्सर विचारों के मामले में काम करने में अकेले सक्षम नहीं होते हैं। उन्हें अर्थ खोजने के लिए अपने अनुभव से जुड़े संदर्भ और/या मॉडल की सुविधा की आवश्यकता होती है। यह स्तर हमारे सामने संदर्भों का उपयोग करते हुए बच्चों को इसमें शामिल करने की चुनौती प्रस्तुत करता है, लेकिन धीरे-धीरे उन्हें इस तरह की निर्भरता से दूर ले जाता है। यद्यपि यह अवस्था हमारे सामने बच्चों को उनके ही संदर्भों में व्यस्त सखने और साथ-ही-साथ इस निर्भरता से धीरे-धीरे दूर जाने जैसी चुनौती प्रस्तुत करती है। जैसे-जैसे हम माध्यमिक विद्यालय में आगे बढ़ेंगे, बच्चे से अपेक्षाएँ अधिक होंगी। उदाहरण के लिए, कक्षा 5 तक के बच्चों ने उन संख्याओं की कल्पना की, जिनके

माध्यम से गणना (प्राकृतिक संख्या) की जा सकती है और कक्षा 6 में बच्चे के सामने ऋणात्मक संख्याओं और पूर्णांकों (integers) का विचार आता है। बच्चे द्वारा संख्या में विभिन्न पैटर्न देखे गए हैं और हो सकता है कि उसने इन्हें सामान्यीकृत भी किया हो। उच्च प्राथमिक स्तर पर बच्चे अंकगणित के सामान्यीकरण के रूप में बीजगणित सीखना शुरू करते हैं। यह संख्याओं के लिए प्रतीकों/अक्षरों को लिखकर और उन सामान्यीकरणों जो संख्या पैटर्न के अवलोकन के बाद देखे गए हैं, के प्रमाणों को स्थापित करके सटीक तरीके से सामान्यीकरण में मदद करता है। इसके अलावा, इस स्तर पर ज्यामिति के अध्ययन का उद्देश्य द्वि-आयामी (2D) और त्रि-आयामी (3D) आकारों का विश्लेषण करना है, ताकि किनारों, शीर्षों और सतहों के आधार पर उनके गुणों का पता लगाया जा सके। बच्चों को गुणों के सामान्यीकरण पर नियम बनाने में सक्षम होना चाहिए, जैसे कि एक आयताकार आकार (बहुभुज) के आंतरिक कोणों का योग 180° के पार्श्वों की संख्या से 2 गुना कम है, एक त्रिभुज और इसके सर्वांगसम त्रिभुज एक समानांतर चतुर्भुज बनाते हैं। इसलिए, एक त्रिकोण के क्षेत्रफल का माप समानांतर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है। बाद में बच्चे से उम्मीद की जाती है कि वह इन सामान्यीकरणों के लिए प्रमाण विकसित करें जो कक्षा 10 और 12 तक जारी रहता है।

शैक्षणिक प्रक्रियाएँ

गणित की शिक्षा को कई कारक प्रभावित कर सकते हैं, लेकिन अध्यापक गणित अधिगम में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। इसलिए, आवश्यक है कि हम यह समझें कि गणित का प्रभावी शिक्षण कैसा होता है और अध्यापक

इस पैटर्न को तोड़ने के लिए क्या कर सकते हैं। समाज में आम धारणा यह है कि यदि गणित का अध्यापक गणित अच्छी तरह से जानता है, तो वह गणित पढ़ाने के लिए सबसे अच्छा व्यक्ति है। लेकिन “गणित सिखाने के बारे में जानना”, को क्या कहा जाए? केवल गणित के ज्ञान से किसी व्यक्ति में गणित सिखाने की क्षमता बनाने में मदद नहीं मिलती। उन्हें गणित पढ़ाने के क्षेत्र में सशक्त ज्ञान होना चाहिए। गणित के ज्ञान और गणित को कैसे पढ़ाया जाए, इसके ज्ञान को एक साथ आमतौर पर शैक्षणिक सामग्री ज्ञान’ (पी.सी. के.) के रूप में जाना जाता है। गणित को रुचिपूर्ण बनाने के लिए कुछ प्रमुख आवश्यक क्रियाएँ निम्नलिखित हैं—

- भागीदारी
- जुड़ाव
- अवलोकन
- परिकल्पना गढ़ना और उनका सत्यापन करना
- समस्या खड़ी करना
- समस्या सुलझाना
- दृश्य बनाना और दर्शाना
- संबंध बनाना
- व्यवस्थित तर्क पद्धति
- गणितीय संचार

राष्ट्रीय उपलब्धि सर्वेक्षण, 2017, के अधिगम परिणामों पर आधारित था, में कक्षा 3, 5 और 8 के लिए गणित में राष्ट्रीय स्तर पर सही प्रतिक्रियाओं का प्रतिशत (औसतन) निम्नानुसार पाया गया है—

कक्षा 3 – 64 प्रतिशत

कक्षा 5 – 53 प्रतिशत

कक्षा 8 – 42 प्रतिशत

क्या हम राज्यों/संघ राज्य क्षेत्रों की औसत उपलब्धि और ज़िले की औसत उपलब्धि के बारे में जानते हैं? अधिक विवरण <http://www.ncert.nic.in/programmes/NAS/SRC.html> पर उपलब्ध है। हमें गणित में अपने विद्यार्थियों के अधिगम परिणामों को बेहतर बनाने के बारे में चिंतन करने की आवश्यकता है।

कक्षावार अधिगम परिणाम

कक्षा 1

विद्यार्थी—

- विभिन्न वस्तुओं को भौतिक विशेषताओं, जैसे—आकृति, आकार तथा अन्य अवलोकनीय गुणों, जैसे—लुढ़कना, खिसकना के आधार पर समूहों में वर्गीकृत करते हैं।
- 1 से 20 तक की संख्याओं पर कार्य करते हैं।
 - 1 से 9 तक की संख्याओं का उपयोग करते हुए वस्तुओं को गिनते हैं।
 - 20 तक की संख्याओं को मूर्त रूप से, चित्रों और प्रतीकों द्वारा बोलकर गिनते हैं।
 - 20 तक संख्याओं की तुलना करते हैं, जैसे—यह बता पाते हैं कि कक्षा में लड़कियों की संख्या या लड़कों की संख्या ज्यादा है।
- दैनिक जीवन में 1 से 20 तक की संख्याओं का उपयोग जोड़ (योग) व घटाने में करते हैं।
- मूर्त वस्तुओं की मदद से 9 तक की संख्याओं के जोड़ तथ्य बनाते हैं। उदाहरण के लिए, $3 + 3$ निकालने के लिए 3 के आगे 3 गिनकर यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $3 + 3 = 6$

- 1 से 9 तक संख्याओं का प्रयोग करते हुए घटाने की क्रिया करते हैं, जैसे— 9 वस्तुओं के एक समूह में से 3 वस्तुएँ निकालकर शेष वस्तुओं को गिनते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि $9 - 3 = 6$
- 9 तक की संख्याओं का प्रयोग करते हुए दिन-प्रतिदिन में उपयोग होने वाले जोड़ तथा घटाव के प्रश्नों को हल करते हैं।
- 99 तक की संख्याओं को पहचानते हैं एवं संख्याओं को लिखते हैं।
- विभिन्न वस्तुओं/आकृतियों के भौतिक गुणों का अपनी भाषा में वर्णन करते हैं, जैसे— एक गेंद लुढ़कती है, एक बॉक्स खिसकता है आदि।
- छोटी लंबाइयों का अनुमान लगाते हैं, अमानक इकाइयों, जैसे— अँगुली, बित्ता, भुजा, कदम आदि की सहायता से मापते हैं।
- आकृतियों तथा संख्याओं के पैटर्न का अवलोकन, विस्तार तथा निर्माण करते हैं। उदाहरण के लिए, आकृतियों/वस्तुओं/संख्याओं की व्यवस्था, जैसे—



- 1, 2, 3, 4, 5,
- 1, 3, 5,
- 2, 4, 6,
- 1, 2, 3, 1, 2, , 1, , 3,

- आकृतियों/संख्याओं का प्रयोग करते हुए किसी चित्र के संबंध में सामान्य सूचनाओं का संकलन करते हैं, लिखते हैं तथा उनका अर्थ बताते हैं। (जैसे, किसी बाग के चित्र को देखकर विद्यार्थी विभिन्न फूलों को देखते हुए यह नतीजा निकालते हैं कि एक विशेष रंग के फूल अधिक हैं।)

- शून्य की अवधारणा को समझते हैं।

कक्षा 2

विद्यार्थी—

- दो अंकों की संख्या के साथ कार्य करते हैं।
- 99 तक की संख्याओं को पढ़ते तथा लिखते हैं।
- दो अंकों की संख्याओं को लिखने एवं तुलना करने में स्थानीय मान का उपयोग करते हैं।
- अंकों की पुनरावृत्ति के साथ और उसके बिना दो अंकों की सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या को बनाते हैं।
- दो अंकों की संख्याओं के जोड़ पर आधारित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करते हैं।
- दो अंकों की संख्याओं को घटाने पर आधारित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करते हैं।
- 3-4 नोट तथा सिक्कों (समान/असमान मूल्यवर्ग के) का प्रयोग करते हुए 100 रुपये तक की मान वाली खेल मुद्रा को दर्शाते हैं।
- मूलभूत 3D (त्रि-विमीय) तथा 2D (द्वि-आयामी) आकृतियों की उनकी विशेषताओं के साथ चर्चा करते हैं।
- 3D (त्रि-विमीय) आकृतियाँ, जैसे— घनाभ, बेलन, शंकु, गोला आदि को उनके नाम से पहचानते हैं।
- सीधी रेखा एवं घुमावदार रेखा के बीच अंतर करते हैं।
- सीधी रेखा का खड़ी, पड़ी, तिरछी रेखा के रूप में प्रदर्शन करते हैं।
- लंबाइयों/दूरियों तथा बर्तनों की धारिता का अनुमान लगाते हैं तथा मापन के लिए

- एकसमान परंतु अमानक इकाइयों, जैसे—छड़/पेंसिल, कप/चम्मच/बालटी इत्यादि का प्रयोग करते हैं।
- सामान्य तुला का प्रयोग करते हुए वस्तुओं की तुलना ‘से भारी’/‘से हल्की’ शब्दों का उपयोग करते हुए करते हैं।
 - सप्ताह के दिनों तथा वर्ष के महीनों को पहचानते हैं।
 - विभिन्न घटनाओं को घटित होने के समय (घंटों/दिनों) के अनुसार क्रम से दिखाते हैं, जैसे—क्या कोई बच्चा घर की तुलना में स्कूल में ज्यादा समय तक रहता है?
 - संकलित आँकड़ों से निष्कर्ष निकालते हैं, जैसे—‘समीर के घर में उपयोग में आने वाले वाहनों की संख्या एंजिलीना के घर में उपयोग किए जाने वाली वाहनों की तुलना में अधिक है।’
- कक्षा 3**
- विद्यार्थी—**
- तीन अकों की संख्या के साथ कार्य करते हैं।
 - स्थानीय मान की मदद से 999 तक की संख्याओं को पढ़ते तथा लिखते हैं।
 - स्थानीय मान के आधार पर 999 तक की संख्याओं के मानों की तुलना करते हैं।
 - दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में 3 अकों की संख्याओं का जोड़ तथा घटाव करते हैं (दोबारा समूह बनाकर या बिना बनाएँ) (जोड़ का मान 999 से अधिक न हो)।
 - 2, 3, 4, 5 तथा 10 के गुणन तथ्य बनाते हैं तथा दैनिक जीवन की परिस्थितियों में उनका उपयोग करते हैं।
 - विभिन्न दैनिक परिस्थितियों का आकलन कर उचित क्रियाओं का उपयोग करते हैं।
 - भाग के तथ्यों को बराबर समूह में बाँटने और बारंबार घटाने की प्रक्रिया के रूप में समझते हैं। उदाहरण के लिए, $12 \div 3$ में 12 को 3-3 के समूह में बाँटने पर कुल समूहों की संख्या 4 होती है अथवा 12 में से 3 को बारंबार घटाने की प्रक्रिया जो कि 4 बार में संपन्न होती है।
 - छोटी राशियों को समूह अथवा बिना समूह के जोड़ते तथा घटाते हैं।
 - मूल्य सूची तथा सामान्य बिल बनाते हैं।
 - द्वि-आयामी आकृतियों की समझ अर्जित करते हैं।
 - कागज को मोड़कर, डॉट प्रिंट पर, पेपर कटिंग द्वारा बनी तथा सरल रेखा से बनी द्वि-आयामी आकृतियों को पहचानते हैं।
 - द्वि-आयामी आकृतियों का वर्णन भुजाओं की संख्या, कोनों की संख्या (शीर्ष) तथा विकर्णों की संख्या के आधार पर करते हैं, जैसे—किताब के कवर की आकृति में 4 भुजा, 4 कोने तथा 2 विकर्ण होते हैं।
 - दिए गए क्षेत्र को एक आकृति के टाइल की सहायता से बिना कोई स्थान छोड़े भरते हैं।
 - मानक इकाइयों, जैसे—सेंटीमीटर, मीटर का उपयोग कर लंबाइयों तथा दूरियों का अनुमान एवं मापन करते हैं। इसके साथ ही इकाइयों में संबंध की पहचान करते हैं।
 - मानक इकाइयों ग्राम, किलोग्राम तथा साधारण तुला के उपयोग से वस्तुओं का भार मापते हैं।
 - अमानक इकाइयों का प्रयोग कर विभिन्न बर्तनों की धारिता की तुलना करते हैं।
 - दैनिक जीवन की स्थितियों में ग्राम, किलोग्राम की मापों को जोड़ते और घटाते हैं।

- कैलेंडर पर एक विशेष दिन तथा तारीख को पहचानाते हैं।
- घड़ी का उपयोग करते हुए घंटे तक समय पढ़ते हैं।
- सरल आकृतियों तथा संख्याओं के पैटर्न का विस्तार करते हैं।
- स्थिति चिह्नों (टेली मार्क्स) चिह्न का प्रयोग करते हुए आँकड़ों का अभिलेखन करते हैं तथा उनको चित्रालेख के रूप में प्रस्तुत कर निष्कर्ष निकालते हैं।

कक्षा 4

विद्यार्थी—

- संख्याओं की संक्रियाओं का उपयोग दैनिक जीवन में करते हैं।
- 2 तथा 3 अंकों की संख्याओं को गुणा करते हैं।
- एक संख्या से दूसरी संख्या को विभिन्न तरीकों से भाग देते हैं, जैसे— चित्रों द्वारा (बिंदुओं का अरेखन कर), बराबर बाँटकर, बार-बार घटाकर, भाग तथा गुणा के अंतर्संबंधों का उपयोग करके।
- दैनिक जीवन के संदर्भ में मुद्रा, लंबाई, भार, धारिता से संबंधित चार संक्रियाओं पर आधारित प्रश्न बनाते हैं तथा हल करते हैं।
- भिन्नों पर कार्य करते हैं।
 - एक दिए गए चित्र अथवा वस्तुओं के समूह में से आधा, एक-चौथाई, तीन-चौथाई भाग को पहचानते हैं।
 - संख्याओं/संख्यांकों की मदद से भिन्नों को आधा, एक-चौथाई तथा तीन-चौथाई के रूप में प्रदर्शित करते हैं।

- किसी भिन्न की अन्य भिन्न से तुल्यता दिखाते हैं।
- अपने परिवेश में विभिन्न आकृतियों के बारे में समझ अर्जित करते हैं।
 - वृत्त के केंद्र, त्रिज्या तथा व्यास को पहचानते हैं।
 - उन आकृतियों को खोजते हैं जिनका उपयोग टाइल लगाने में किया जा सकता है।
 - दिए गए जाल (नेट) की मदद से घन/घनाभ बनाते हैं।
 - कागज मोड़कर/काटकर, स्याही के धब्बों द्वारा, परावर्तन समिति प्रदर्शित करते हैं।
 - सरल वस्तुओं के शीर्ष दृश्य (Top View), सम्मुख दृश्य (Front View), पाश्व दृश्य (Side View) आदि का चित्रांकन करते हैं।
 - सरल ज्यामितीय आकृतियों (त्रिभुज, आयत, वर्ग) का क्षेत्रफल तथा परिमाप एक दी हुई आकृति को इकाई मानकर ज्ञात करते हैं, जैसे— किसी टेबल की ऊपरी सतह को भरने के लिए एक जैसी कितनी किताबों की आवश्यकता पड़ेगी।
 - मीटर को सेंटीमीटर एवं सेंटीमीटर को मीटर में बदलते हैं।
 - किसी वस्तु की लंबाई, दो स्थानों के बीच की दूरी, विभिन्न वस्तुओं के भार, द्रव का आयतन आदि का अनुमान लगाते हैं तथा वास्तविक माप द्वारा उसकी पुष्टि करते हैं।
 - दैनिक जीवन में लंबाई, दूरी, वजन, आयतन तथा समय से संबंधित प्रश्नों को चार मूलभूत गणितीय संक्रियाओं का उपयोग कर हल करते हैं।
 - घड़ी के समय को घटे तथा मिनट में पढ़ सकते हैं तथा उन्हें a.m. और p.m. के रूप में व्यक्त करते हैं।

- 24 घंटे की घड़ी को 12 घंटे की पड़ी से संबंधित करते हैं।
- दैनिक जीवन की घटनाओं में लगने वाले समय अंतराल की गणना, आगे/पीछे गिनकर अथवा जोड़ने/घटाने के माध्यम से करते हैं।
- गुणा तथा भाग में पैटर्न की पहचान कर सकते हैं। (9 के गुणज तक)
- सममिति (Symmetry) पर आधारित ज्यामितीय पैटर्न का अवलोकन, पहचान और विस्तार करते हैं।
- इकट्ठा की गई जानकारी को सारणी, दंड आलेख के माध्यम से प्रदर्शित कर उनसे निष्कर्ष निकालते हैं।

कक्षा 5

विद्यार्थी—

- बड़ी संख्याओं पर कार्य करते हैं।
 - परिवेश में उपयोग की जाने वाली 1,000 से बड़ी संख्याओं को पढ़ते तथा लिखते हैं।
 - 1,000 से बड़ी संख्याओं पर, स्थानीय मान को समझते हुए चार मूल संक्रियाएँ करते हैं।
 - मानक एल्गोरिदम द्वारा एक संख्या से दूसरी संख्या को भाग देते हैं।
 - जोड़, घटाव गुणन तथा भागफल का अनुमान लगाते हैं तथा विभिन्न तरीकों का प्रयोग कर उनकी पुष्टि करते हैं, जैसे— मानक एल्गोरिदम का प्रयोग कर या किसी दी हुई संख्या को अन्य संख्याओं के जोड़ तथ्य के रूप में लिखकर संक्रिया का उपयोग करना। उदाहरण के लिए, 9,450 को 25 से भाग देने हेतु 9,000 को 25 से, 400 को 25 से

तथा अंत में 50 को 25 से भाग देकर जितने भी भागफल प्राप्त हों, उन सभी को जोड़कर उत्तर प्राप्त करते हैं।

- भिन्न के बारे में समझ अर्जित करते हैं।
 - समूह के हिस्से के लिए भिन्न संख्या बनाते हैं।
 - एक दिए गए भिन्न के समतुल्य भिन्न की पहचान कर सकते हैं तथा समतुल्य भिन्न बनाते हैं।
 - दिए गए भिन्नों $1/2, 1/4, 1/5$ को दशमलव भिन्न में तथा दशमलव भिन्न को भिन्न रूप में लिखते हैं, जैसे— लंबाई और मुद्रा की इकाइयों का उपयोग करके यह जानना कि ₹10 का आधा ₹5 होगा।
 - भिन्न को दशमलव संख्या तथा दशमलव संख्या को भिन्न में लिखते हैं।
- कोणों तथा आकृतियों की अवधारणा की खोजबीन करते हैं।
 - कोणों को समकोण, न्यून कोण, अधिक कोण में वर्गीकृत करते हैं और उन्हें बना सकते हैं एवं पहचान सकते हैं।
 - अपने परिवेश में उन 2D आकृतियों को पहचानते हैं जिनमें अक्षरों की तरह व आकृतियों घूर्णन तथा परावर्तन सम्मितता हो।
 - जालों का प्रयोग करते हुए घन, बेलन, शंकु बनाते हैं।
- सामान्यतः प्रयोग होने वाली लंबाई, भार, आयतन की बड़ी तथा छोटी इकाइयों में संबंध स्थापित करते हैं तथा बड़ी इकाइयों को छोटी व छोटी इकाइयों को बड़ी इकाई में बदलते हैं।
- ज्ञात इकाइयों में किसी ठोस वस्तु का आयतन ज्ञात करते हैं, जैसे कि एक बाल्टी का आयतन जग के आयतन का 20 गुना है।

- पैसा, लंबाई, भार, आयतन तथा समय अंतराल से संबंधित प्रश्नों में चार मूल गणितीय संक्रियाओं का उपयोग करते हैं।
- त्रिभुजीय संख्याओं तथा वर्ग संख्याओं के पैटर्न पहचानते हैं।
- दैनिक जीवन से संबंधित विभिन्न आँकड़ों को एकत्रित करते हैं तथा उन्हें सारणी एवं दंड आलेख के रूप में प्रस्तुत करते हैं और उनकी व्याख्या करते हैं।

कक्षा 6

विद्यार्थी—

- बड़ी संख्याओं से संबंधित समस्याओं को उचित संक्रियाओं (जोड़, घटा, गुणन, भाग) के प्रयोग द्वारा हल करते हैं।
- पैटर्न के आधार पर संख्याओं को सम, विषम, अभाज्य संख्या, सह-अभाज्य संख्या आदि के रूप में वर्गीकरण कर पहचानते हैं।
- विशेष स्थिति में महत्तम समापवर्तक या लघुत्तम समापवर्तक का उपयोग करते हैं।
- पूर्णांकों के जोड़ तथा घटा से संबंधित समस्याओं को हल करते हैं।
- पैसा, लंबाई, तापमान आदि से संबंधित स्थितियों में भिन्न तथा दशमलव का प्रयोग करते हैं, जैसे— 7.5 मीटर कपड़ा, दो स्थानों के बीच 112.5 किलोमीटर की दूरी आदि।
- दैनिक जीवन की समस्याओं, जिनमें भिन्न तथा दशमलव का जोड़/घटा हो, को हल करते हैं।
- किसी स्थिति के सामान्यीकरण हेतु चर राशि का विभिन्न संक्रियाओं के साथ प्रयोग करते हैं, जैसे— किसी आयत का परिमाप जिसकी भुजाएँ x इकाई तथा 3 इकाई हैं, $2(x+3)$ इकाई होगा।

- अलग-अलग स्थितियों में अनुपात का प्रयोग कर विभिन्न राशियों की तुलना करते हैं, जैसे— किसी विशेष कक्षा में लड़कियों एवं लड़कों का अनुपात 3:2 है।
- एक किंवित का प्रयोग विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए करते हैं, जैसे— यदि 1 दर्जन कॉपियों की कीमत दी गई हो तो 7 कॉपियों की कीमत ज्ञात करने हेतु पहले 1 कॉपी की कीमत ज्ञात करते हैं।
- ज्यामितीय अवधारणाओं, जैसे— रेखा, रेखाखंड खुली एवं बंद आकृतियों, कोण, त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त आदि का अपने परिवेश के उदाहरणों द्वारा वर्णन करते हैं।
- कोणों की समझ को निम्नानुसार व्यक्त करते हैं—
 - अपने परिवेश में कोणों के उदाहरण की पहचान करते हैं।
 - कोणों को उनके माप के आधार पर वर्गीकृत करते हैं।
 - 45° , 90° , 180° को संदर्भ कोण के रूप में लेकर अन्य कोणों के माप का अनुमान लगाते हैं।
- ऐखिक सममिति के बारे में अपनी समझ निम्नानुसार व्यक्त करते हैं—
 - द्वि-आयामी (2D) आकृतियों में, वह सममित आकृतियाँ पहचानते हैं जिनमें एक या अधिक सममित रेखाएँ हैं।
 - सममित द्वि-आयामी (2D) आकृतियों की रचना करते हैं।
 - त्रिभुओं को उनके कोण तथा भुजाओं के आधार पर वर्गीकृत करते हैं, जैसे— भुजाओं के आधार

पर विषमबाहु त्रिभुज, समद्विबाहु त्रिभुज, समबाहु त्रिभुज आदि।

- चतुर्भुजों को उनके कोण तथा भुजाओं के आधार पर विभिन्न समूहों में वर्गीकृत करते हैं।
- अपने परिवेश में स्थित विभिन्न 3D वस्तुओं की पहचान करते हैं, जैसे—गोला, घन, घनाभ, बेलन, शंकु आदि।
- 3D वस्तुओं/आकृतियों के किनारे, शीर्ष, फलक का वर्णन कर उदाहरण देते हैं।
- आयताकार वस्तुओं का परिमाप तथा क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं, जैसे—कक्षा का फर्श, चॉक के डिब्बे की ऊपरी सतह का परिमाप तथा क्षेत्रफल।
- दी गई/संकलित की गई सूचना को सारणी, चित्रालेख, दंड आलेख के रूप में प्रदर्शित कर व्यवस्थित करते हैं और उसकी व्याख्या करते हैं, जैसे—विगत छह माह में किसी परिवार के विभिन्न सामग्रियों पर हुए खर्च को।

कक्षा 7

विद्यार्थी

- दो पूर्णांकों का गुणन/भाग करते हैं।
- भिन्नों के भाग तथा गुणन की व्याख्या करते हैं।
- उदाहरण के लिए, $\frac{2}{3} \times \frac{4}{5}$ की व्याख्या $\frac{2}{3}$ का $\frac{4}{5}$ के रूप में करते हैं। इसी प्रकार $\frac{1}{2} \div \frac{1}{4}$ की व्याख्या इस रूप में करते हैं कि कितने $\frac{1}{4}$ मिलकर $\frac{1}{2}$ बनाते हैं?
- परिमेय संख्या से संबंधित दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करते हैं।
- दैनिक जीवन से संबंधित समस्याओं, जिनमें परिमेय संख्या भी शामिल हैं, को हल करते हैं।
- बड़ी संख्याओं के गुणन तथा भाग को सरल करने हेतु संख्याओं के घातांक रूप का प्रयोग करते हैं।

- दैनिक जीवन की समस्याओं को सरल समीकरण के रूप में प्रदर्शित करते हैं तथा हल करते हैं।
- बीजीय व्यंजकों का योग तथा अंतर ज्ञात करते हैं।
- उन राशियों को पहचानते हैं जो समानुपात में हैं, जैसे कि विद्यार्थी यह बता सकते हैं कि 15, 45, 40, 120 समानुपात में हैं, क्योंकि $\frac{15}{45}$ का मान $\frac{40}{120}$ के बराबर है।
- प्रतिशत को भिन्न तथा दशमलव में एवं भिन्न तथा दशमलव को प्रतिशत में रूपांतरित करते हैं।
- लाभ/हानि प्रतिशत तथा साधारण ब्याज में दर प्रतिशत की गणना करते हैं।
- कोणों के जोड़े को रेखीय, पूरक, संपूरक, आसन्न कोण, शीर्षभिमुख कोण के रूप में वर्गीकृत करते हैं तथा एक कोण का मान ज्ञात होने पर दूसरे कोण का मान ज्ञात करते हैं।
- तिर्यक रेखा द्वारा दो रेखाओं को काटने से बने कोणों के जोड़े के गुणधर्म का सत्यापन करते हैं।
- यदि त्रिभुज के दो कोण ज्ञात हों तो तीसरे अज्ञात कोण का मान ज्ञात करते हैं।
- त्रिभुजों के बारे में दी गई सूचना, जैसे SSS, SAS, ASA, RHS के आधार पर त्रिभुजों की सर्वांगसमता की व्याख्या करते हैं।
- पैमाने (स्केल) तथा परकार की सहायता से एक रेखा के बाहर स्थित बिंदु से रेखा के समांतर एक अन्य रेखा खींचते हैं।
- एक बंद आकृति के अनुमानित क्षेत्रफल की गणना इकाई वर्ग ग्रिड/ग्राफ पेपर के द्वारा करते हैं।
- आयत तथा वर्ग द्वारा घिरे क्षेत्र के क्षेत्रफल की गणना करते हैं।

- दैनिक जीवन के साधारण आँकड़ों के लिए विभिन्न प्रतिनिधि मानों, जैसे— समांतर माध्य, माध्यिका, बहुलक की गणना करते हैं।
- वास्तविक जीवन की स्थितियों में परिवर्तन शीलता को पहचानते हैं, जैसे विद्यार्थियों की ऊँचाइयों में परिवर्तन या सिक्का उछालने जैसी क्रियाओं में चिट (हेड) या पट (टेल) के आने की अनिश्चितता।
- दंड आलेख के द्वारा आँकड़ों की व्याख्या करते हैं, जैसे गर्मियों में बिजली की खपत सर्दियों के मौसम से ज्यादा होती है, किसी टीम द्वारा प्रथम 10 ओवर में बनाए गए रनों का स्कोर आदि।

कक्षा 8

विद्यार्थी—

- परिमेय संख्याओं में योग, अंतर, गुणन, तथा भाग के गुणों का एक पैटर्न द्वारा सामान्यीकरण करते हैं।
- दो परिमेय संख्याओं के बीच अनेक परिमेय संख्याएँ ज्ञात करते हैं।
- 2, 3, 4, 5, 6, 9 तथा 11 से विभाजन के नियम को सिद्ध करते हैं।
- संख्याओं का वर्ग, वर्गमूल, घन, तथा घनमूल विभिन्न तरीकों से ज्ञात करते हैं।
- पूर्णांक घातों वाली समस्याएँ हल करते हैं।
- चरों का प्रयोग कर दैनिक जीवन की समस्याएँ तथा पहेलियाँ हल करते हैं।
- बीजीय व्यंजकों को गुणा करते हैं, जैसे $(2x - 5)$ $(3x^2 + 7)$ का विस्तार करते हैं।
- विभिन्न सर्वसमिकाओं का उपयोग दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए करते हैं।

- प्रतिशत की अवधारणा का प्रयोग लाभ तथा हानि की स्थितियों में छूट की गणना, जी. एस.टी. (GST), चक्रवृद्धि ब्याज की गणना के लिए करते हैं, जैसे यदि अंकित मूल्य तथा वास्तविक छूट दी गई हो तो छूट प्रतिशत ज्ञात करते हैं अथवा क्रय मूल्य तथा लाभ की राशि दी हो तो लाभ प्रतिशत ज्ञात करते हैं।
- समानुपात तथा व्युत्क्रमानुपात (direct and inverse proportion) पर आधारित प्रश्न हल करते हैं।
- कोणों के योग के गुणधर्म का प्रयोग कर चतुर्भुज के कोणों से संबंधित समस्याएँ हल करते हैं।
- समांतर चतुर्भुज के गुणधर्मों का सत्यापन करते हैं तथा उनके बीच तर्क द्वारा संबंध स्थापित करते हैं।
- 3D आकृतियों को द्वि-आयामी समतलों, जैसे— कागज के पन्ने, श्यामपट्ट आदि पर प्रदर्शित करते हैं।
- पैटर्न के माध्यम से यूलर (Euler's) संबंध का सत्यापन करते हैं।
- पैमाने (स्केल) तथा परकार के प्रयोग से विभिन्न चतुर्भुजों की रचना करते हैं।
- समलंब चतुर्भुज तथा अन्य बहुभुज के क्षेत्रफलों का अनुमानित मान इकाई वर्ग ग्रिड/ग्राफ पेपर के माध्यम से करते हैं तथा सूत्र द्वारा उसका सत्यापन करते हैं।
- बहुभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं।
- घनाभाकार तथा बेलनाकार वस्तुओं का पृष्ठीय क्षेत्रफल तथा आयतन ज्ञात करते हैं।
- दंड आलेख तथा पाई आलेख बनाकर उनकी व्याख्या करते हैं।
- किसी पटना के पूर्व में घटित होने या पासे या सिक्कों की उछाल के आँकड़ों के आधार पर

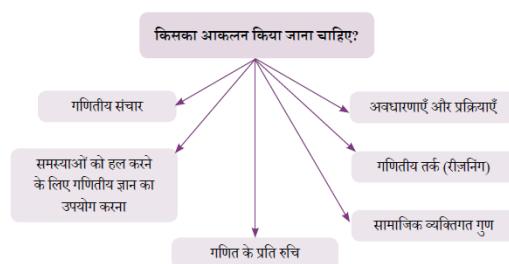
भविष्य में होने वाली ऐसी घटनाओं के घटित होने का अनुमान लगाते हैं।

प्राथमिक स्तर पर गणित में आकलन

प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने के मूल्यांकन पर ध्यान केंद्रित किया जाना चाहिए कि बच्चे कैसे सीखते हैं। मूल्यांकन इन बिंदुओं पर किया जाएगा—

- बच्चे गणित कैसे सीखते हैं, इसकी समझ पर;
- गणितीय अवधारणाओं और दैनिक जीवन में उनके अनुप्रयोग के विकास पर;
- बच्चों के सामाजिक व्यक्तिगत गुणों के विकास पर।

आइए, अब हम इस बात पर चिंतन करें कि गणित में मोटे तौर पर किसका आकलन किया जाना चाहिए। इन क्षेत्रों को नीचे दिए गए आरेख में प्रस्तुत किया गया है।



प्राथमिक स्तर पर गणित पढ़ाते समय सबसे सामान्य प्रश्न यह है कि, गणितीय शिक्षण के संबंध में किसका आकलन किया जाना चाहिए?

स्वयं से प्रश्न करें कि वह क्या है जिसकी आपको तलाश है? जहाँ तक गणित के अधिगम का सवाल है, यदि हम विद्यालयी गणित के व्यापक परिप्रेक्ष्य को देखें तो आमतौर पर यह स्वीकार किया जाता है कि बच्चों को गणित के बारे में 'संवाद करने, बात करने,

आपस में चर्चा करने, साथ काम करने के लिए', के रूप में कुछ खोजना होगा।

विद्यार्थी का निम्नलिखित क्षमताओं के संबंध में आकलन किया जाना चाहिए कि क्या वे इसमें सक्षम हैं—

- गणितीय तथ्यों, आँकड़ों इत्यादि को समेकित करने और उससे निष्कर्ष निकालने में या फिर उसके कारण जानने में;
- संबंधों को समझने, संरचनाओं को देखने, तार्किक रूप से कथनों के सही और गलत होने का तर्क देने के लिए अमूर्त चिंतन करने में;
- गणित की विभिन्न शाखाओं जैसे अंकगणित बीजगणित, ज्यामिति, आँकड़ों के प्रबंधन, क्षेत्रमिति आदि की मूल संरचना को समझने में;
- अमूर्त और सामान्यीकरण से संबंधित समस्याओं से निपटने के विभिन्न तरीकों से परिचित होने में;
- दैनिक जीवन की स्थितियों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए इस स्तर पर सीखी गई गणितीय अवधारणाओं को लागू करने में;
- सामूहिक गतिविधि करते समय एक-दूसरे का सहयोग और सहायता करने में;

मॉड्यूल में विद्यालय आधारित आकलन (School-Based Assessment) में दैनिक शिक्षण-अधिगम की प्रक्रियाओं के साथ एकीकृत करने के लिए बताए गए मूल्यांकन के विभिन्न उपकरणों (टूल्स) का विवेकपूर्ण रूप से उपयोग किया जाना है। अधिगम के परिणामों में निर्धारित वांछित दक्षताओं को पूरा करने के लिए प्रारंभिक स्तर पर गणित के शिक्षण-अधिगम को दर्शाने के लिए कुछ उदाहरण नीचे दिए गए हैं।

नमूना 1

यह गतिविधि प्री-स्कूल के अंतिम वर्ष या कक्षा 1 की शुरुआत में आयोजित की जा सकती है।

सीखने के प्रतिफल

1 से 9 वस्तुओं वाले समूहों के लिए संख्या के नामों का उपयोग करना

गतिविधि का उद्देश्य

बच्चा यह करने में सक्षम होगा—

- दिए गए समूह के अनुरूप संख्या का नाम बताने में;
- 1 से 10 तक क्रम में संख्या के नाम बताने में।

आवश्यक सामग्री

उपयुक्त सामग्री उपलब्ध कराई जा सकती है जो कविता/कहानी, श्रव्य-दृश्य सामग्री के पूरक हैं।

प्रक्रिया

- आमतौर पर बच्चे कक्षा में प्रवेश करने से पहले ही संख्या के संपर्क में आते हैं। उदाहरण के लिए, उन्होंने सुना होता है कि बड़े लोग अपने दैनिक जीवन में संख्याओं के नाम का उपयोग कर रहे हैं, जैसे—मुझे एक और बिस्किट की आवश्यकता है, मुझे ₹5 दें, हम 2 दिनों के बाद दादी के घर जाएँगे आदि।
- कुछ बच्चे पहले से ही संख्या के नाम (यादृच्छिक और/या क्रम में) जान सकते हैं। इस गतिविधि का उद्देश्य बच्चों को संख्या के नाम या गिनती के नामों से परिचित कराना है, ताकि वे एक संदर्भ का उपयोग कर सकें जिससे बच्चा एक सह-संबंध बना सके।
- विद्यार्थियों को संख्या के नामों को क्रम से समझने में मदद करने के लिए कक्षा में छोटी कविताओं (एक कक्षा के विद्यार्थियों के लिए उपयुक्त),

गाने, खेल या कहानियों आदि जिसमें संख्या के नाम (यादृच्छिक और क्रम में दिए गए) शामिल हैं, याद कराए जा सकते हैं।

- नीचे एक कविता दी गई है। अध्यापक अपनी स्थानीय भाषा में ऐसी कई कविताएँ ले सकते हैं।

एक एक एक

एक छोटा बच्चा

एक रोटी खाओ।

(उन वस्तुओं को दिखाएँ जो 1 की संख्या में मौजूद हैं, जैसे—नाक, आकाश में सूरज आदि और बच्चों को शरीर के उन हिस्सों और वस्तुओं को छूने या दिखाने के लिए कहें जो संख्या 1 में मौजूद हैं।)

दो दो दो

दो छोटे बच्चे

चिड़ियाघर जाओ।

(उन वस्तुओं को दिखाएँ जो 2 के समूह में मौजूद हैं, जैसे—आँखें, साइकिल के दो पहिए आदि और बच्चों को शरीर के उन हिस्सों और वस्तुओं को छूने या दिखाने के लिए कहें जो 2 के समूह में मौजूद हैं।

तीन तीन तीन

तीन हरे तोते

आज्जाद उड़े।

चार चार चार

चार भूखे पिल्ले

अधिक खाना चाहें।

पाँच पाँच पाँच

पाँच है मधुमक्खियाँ

जा रही छते में।

(कविता और वस्तुओं के समूह को संख्या 9 तक जोड़ना जारी रखें।)

कक्षा में उन सभी बच्चों को इस गतिविधि में भाग लेने का अवसर प्रदान करें, जो भाग लेने में संकोच करते हैं। विभिन्न क्षमताओं वाले बच्चों को उनकी क्षमताओं के अनुसार उदाहरणों को उद्धृत करने के लिए कहा जाना चाहिए।

नमूना 2

प्राथमिक विद्यालय के विद्यार्थी आमतौर पर कोण की ज्यामितीय अवधारणा को समझने में कठिनाइयों का अनुभव करते हैं। वे कठिनाइयों का अनुभव क्यों करते हैं? ज्यादातर समय यह कठिनाई उस समय होती है जब अध्यापक अवधारणा को समझने में विद्यार्थियों की मदद करता है। कुछ मानक पाठ्यपुस्तकों में दी गई गणितीय शब्दावली का उपयोग करते हुए एक कोण को परिभाषित करने के बजाय, हमें विभिन्न और दैनिक जीवन में दिखाई देने वाली स्थितियों का उपयोग करना चाहिए, जैसे—

- सड़क के चौराहे पर, कैंची में, घड़ी के कांटे आदि में;
- टेबल टॉप के कॉर्नर, माचिस के कोने आदि में;
- हाथ या पैर के झुकुने पर;
- बच्चों के पार्क में ढलान, रैप, छत, पहाड़ी, रेलवे सिग्नल, स्लाइड इत्यादि पर;
- दरवाजा खोलने और बंद करने, वाइपर, छत का पंखा, पहिये की तीलियाँ आदि में।

ऐसी परिस्थितियाँ कोण की अवधारणा को व्यवस्थित तरीके से विकसित करने के लिए बहुत सारे अवसर प्रदान करती हैं। यह बहुत महत्वपूर्ण है कि कोण की अवधारणा को समझा जाए, क्योंकि यह आरंभिक कक्षाओं में ज्यामितीय से संबंधित विषयों को समझने में मूल अवधारणा का काम करती है।

इसलिए यह उदाहरण कुछ ऐसी गतिविधियाँ सुझाता है जिनसे कोण की अवधारणा और अर्थ समझने में मदद मिले तथा कोणों को न्यून कोण, समकोण और अधिक कोण में वर्गीकृत किया जा सके। इसमें सीखने की प्रगति जानने के लिए आकलन से संबंधित कुछ गतिविधियाँ भी हैं।

प्रमुख धारणाएँ

कोण, कोण का माप, कोणों का वर्गीकरण, कोणों की तुलना

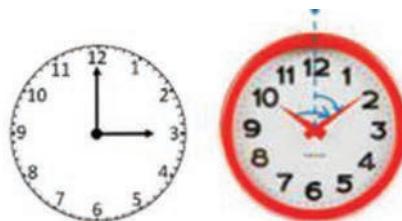
सीखने के प्रतिफल

- कोण के विचार की व्याख्या करता है।
- कोणों को समकोण, न्यून कोण और अधिक कोण में वर्गीकृत करता है।

अधिगम के इन परिणामों को प्राप्त करने के लिए विद्यार्थियों को उन समूहों में विभाजित किया जा सकता है जिनमें छात्र-छात्राओं की संख्या लगभग बराबर होगी। समूह निम्नलिखित गतिविधियों में संलग्न हो सकते हैं।

गतिविधि 1

- विद्यार्थियों से घड़ी के दोनों काँटों को अलग-अलग समय पर देखने और दोनों काँटों के बीच के खुले स्थान का वर्णन करने के लिए कहें।



- सुनिश्चित करें कि घड़ियाँ ऐसी हों कि घड़ी के काँटों (यानी सुई), उन पर संख्या आदि को हाथों से छूने के बाद महसूस किया जा सकता हो।

- विद्यार्थियों को घड़ी के काँटों के बीच बनने वाले कोण के संदर्भ में निरीक्षण करने और उसे व्यक्त करने के लिए कहें, प्रस्तुत चित्र दिखाएँ। क्या विद्यार्थी ऐसी वस्तुओं की पहचान कर सकते हैं जिनमें कोण के माप और उनके संबंध शामिल हैं?
- इस गतिविधि को विद्यार्थियों को 1 से 12 तक अलग-अलग संख्याओं से निर्दिष्ट कर एक गोले में व्यवस्थित करके भी किया जा सकता है। विद्यार्थी उभरी संख्या वाले कार्ड को हाथ में पकड़ सकते हैं। इस कार्ड पर उभरी संख्या को पहचान कर कोण का अनुमान लगाने में अन्य विद्यार्थियों की मदद कर सकते हैं।
- केंद्र बिंदु निर्धारित किए जा सकते हैं।
- घड़ी के हाथ बनाने के लिए विद्यार्थियों की दो पंक्तियाँ केंद्र से निकलती हुई और दो अलग दिशाओं में जाती हुई, वृत्त की सीमा की ओर एक कोण बनाते हुए बनाए जा सकते हैं।
- केंद्र और सीमा पर खड़े ये बच्चे अपनी स्थिति और उनके द्वारा पकड़े गए कार्ड के बारे में बताते रहेंगे।
- कोण को एक या दोनों पंक्तियों को फिर से व्यवस्थित करके बदला जा सकता है।
- विशेष आवश्यकता वाले विद्यार्थी सीमारेखा का हिस्सा वा सुई की धुरी बन सकते हैं।

गतिविधि 2

विद्यार्थियों से कैंची, कपास, डिवाइडर आदि वस्तुओं का निरीक्षण करने को कहें और स्वयं के शब्दों में कोण बनने के संदर्भ में खुले हिस्से का वर्णन करने के लिए कहें।



गतिविधि 3

विद्यार्थियों को कमरे में एक दरवाजे के खुले हिस्से और बंद होने वाले हिस्से का निरीक्षण करने को कहें और स्वयं के शब्दों में इसकी गति के दौरान विभिन्न बिंदुओं पर दरवाजे की गति से बनने वाले कोणों के संदर्भ में वर्णन करने के लिए कहें। बच्चों को वस्तुओं को छूने और बिंदुओं पर बने कोण के बारे में विचार करने के अवसर प्रदान किए जाने चाहिए।



गतिविधि 4

विद्यार्थियों को किसी बॉक्स के ढक्कन के खुले हिस्से और बंद होने वाले हिस्से का निरीक्षण कर उससे बनने वाले कोणों का वर्णन स्वयं के शब्दों में करने के लिए कहें।



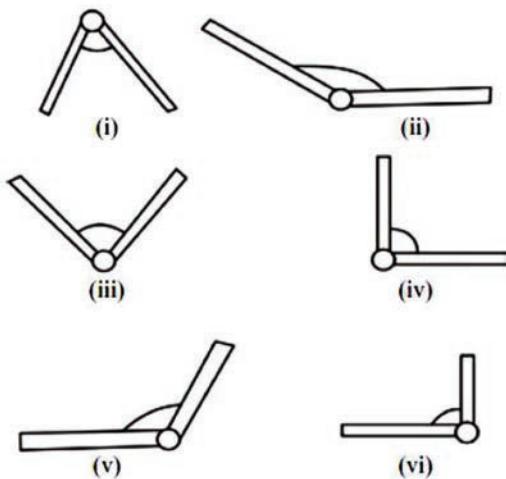
अध्यापक इस तरह की गतिविधियों का इस्तेमाल कोण की अवधारणा समझाने के लिए कर सकते हैं। कोण एक ऐसा चित्र है जो एक ही बिंदु से निकलती हुई किरणों से बनता है। इन किरणों को

कोण की भुजाएँ कहते हैं और जो सामान्य बिंदु है, उसे शीर्ष कहते हैं।

इस बात पर ज़ोर दिया जा सकता है कि कोण का नामकरण करते समय, शीर्ष हमेशा बीच में होता है; और भुजाएँ धूमती हैं।

गतिविधि 5

- विद्यार्थियों से लकड़ी/प्लास्टिक/झाड़ू की सींक और समान रूप से काटी गई रबर की कुछ नलियों को लाने के लिए कहें।
- उन्हें नीचे दिखाए गए अनुसार रबर की नलियों के टुकड़ों का उपयोग करते हुए छड़ों को जोड़ने के लिए कहें, ताकि कोणों की माप को समझाया जा सके। इसके अलावा, विद्यार्थी कैंची या डिवाइडर का उपयोग कर सकते हैं।
- विद्यार्थियों को छड़ों के इन जोड़े में खुले स्थान देखने के लिए प्रोत्साहित करें (एक समय में किसी भी दो को लें)।



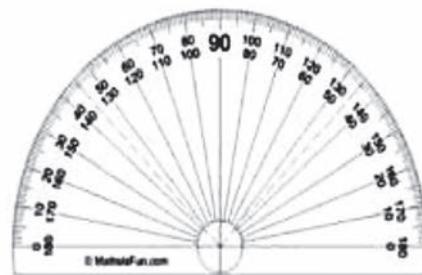
- यह ध्यान दे सकेंगे कि चित्र (i) और (ii) या (ii) और (iii) या (iii) और (iv) या (iv)

और (v) या (v) और (vi) में, यह तय करना आसान है कि “कौन-सा खुला हिस्सा अधिक बड़ा है” या “कौन-सा खुला हिस्सा छोटा है”। अर्थात् ज्यामितीय शब्दों में यह तय किया जा सकेगा कि कौन-सा कोण बड़ा या छोटा है।

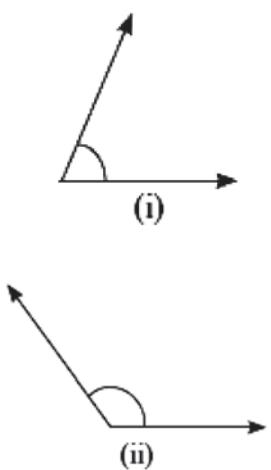
- उन्हें देखने दीजिए कि छड़ों के मामलों में जोड़े के खुले हिस्सों (i) और (iii) या (ii) और (v) या (iv) और (vi) में यह तय करना मुश्किल है कि कौन-सा खुला हिस्सा अधिक बड़ा है या कौन-सा खुला हिस्सा छोटा है। दूसरे शब्दों में, कौन-सा कोण बड़ा या कौन-सा छोटा है।
- ऐसी गतिविधियाँ विद्यार्थियों में विभिन्न प्रकार के कोणों को मापने की आवश्यकता के कारण की या करायी जा सकती हैं।
- इस प्रकार की गतिविधियाँ दृष्टिबाधित विद्यार्थियों द्वारा भी की जा सकती हैं।

गतिविधि 6

- ज्यामिति बॉक्स से एक चाँदा अथवा कोणमापक (प्रॉटैक्टर) निकालें और इसे विद्यार्थियों को दिखाएँ। चाँदे पर उभरी लाइनों और संख्याओं को स्पष्टनीय होना चाहिए, ताकि बच्चे उन पर उँगलियाँ धुमाकर उन्हें पढ़ सकें। स्पर्श के माध्यम से सभी विद्यार्थियों को यह महसूस करने दें कि सामान्य चाँदा अर्धवृत्ताकार है।



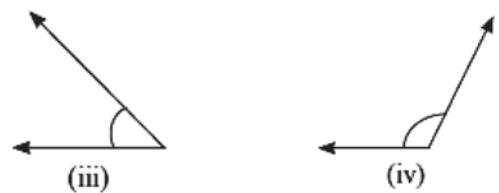
- विद्यार्थियों को चाँदे के किनारे पर (0° – 180° और 180° – 0°) दो प्रकार के स्केल देखने के लिए कहें।
- विद्यार्थियों को बताएँ कि कोण को “डिग्री” (प्रतीकात्मक रूप से $^{\circ}$ के रूप में निरूपित) में मापा जाता है। इसके साथ ही विद्यार्थियों को बताएँ कि कोणों को मापने के लिए चाँदे का उपयोग किस प्रकार से किया जाता है।
- विद्यार्थियों से उपरोक्त कोणों को मापने या कुछ कोणों को बनाने और उन्हें मापने के लिए कहा जा सकता है।



- बच्चों को प्लास्टिक/लकड़ी की छड़ों को जोड़कर, कोण बनाकर दिखाएँ। बच्चों से उनके बीच के खुले स्थान को मापने के लिए भी कहा जा सकता है।
- विद्यार्थियों को इस प्रकार के कोणों को मापने में मदद करें और उन्हें चाँदे के किनारे पर दो प्रकार के स्केल की आवश्यकता और उपयोग के बारे में बताएँ।

गतिविधि 7

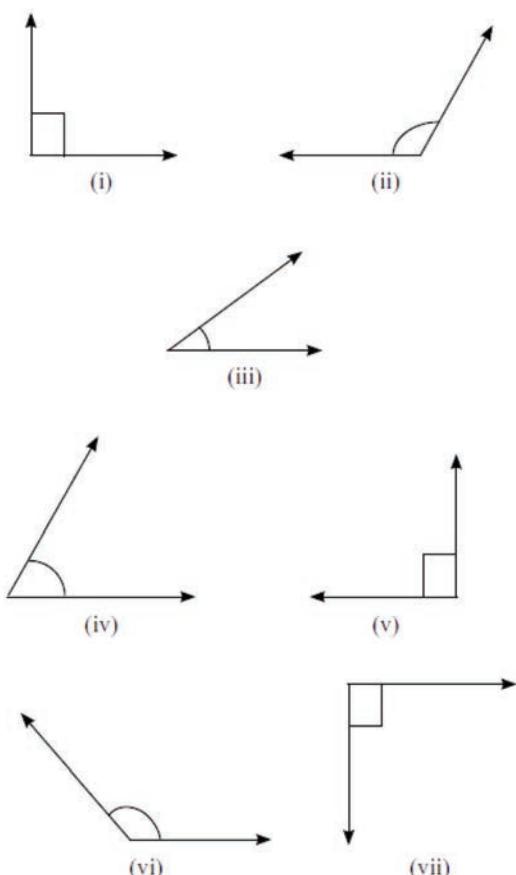
- विद्यार्थियों को अपनी पुस्तकों, कॉपी, कमरे आदि के प्रत्येक कोने पर बने कोणों को देखने के लिए प्रोत्साहित करें और यह तय करने दें कि क्या प्रत्येक स्थिति में चाँदे का उपयोग करके कोण को मापा जा सकता है। उन्हें अपने आसपास से ऐसी वस्तुओं को चुनने और उन पर चर्चा करने की अनुमति दें।
- उन्हें प्रत्येक कोने पर चाँदा का उपयोग करके कोण को मापने दें और इसे नोट करने के लिए कहें।
- 90° के कोण वाले कोण के लिए ‘समकोण’ शब्द का परिचय दें।



गतिविधि 8

- विद्यार्थियों को छात्र-छात्राओं के चार या पाँच मिश्रित समूहों में विभाजित किया जा सकता है।
- प्रत्येक समूह को नीचे दिए गए कोणों का सेट कागज बनाकर या कटआउट बनाकर दिया जा सकता है।
- प्रत्येक समूह को चाँदे का उपयोग करके कोणों को मापने और चार्ट पेपर में नोट करने के लिए प्रोत्साहित करें।
- उन्हें मापों का अवलोकन करने दें और यह भी समझने दें कि आकृति (i), (vii) और (v) में दिए गए कोण समकोण हैं।

- उन्हें यह भी देखने को कहें कि कोण (iii) और (iv) एक समकोण से कम (उससे छोटे) हैं और फिर 0° से बड़े हैं; और कोण (ii) और (vi) एक समकोण से बड़े (से बड़े) हैं और 180° से कम हैं। (यह कागज का उपयोग करके हाथ से बनाए हुए चाँदे के माध्यम से किया जा सकता है, जैसा कि कक्षा 6 की राशि.अ.प्र.प. की गणित की पाठ्यपुस्तक में भी दिखाया गया है।)



- विद्यार्थियों को बताएँ कि कोण (iii) और (iv) को न्यून कोण और (ii) और (vi) को अधिक कोण कहा जाता है।

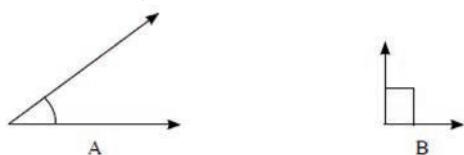
- विद्यार्थी कक्षा 1 से 8 के लिए गणित में (राशि.अ.प्र.प. द्वारा प्रकाशित गणित किट और प्रयोगशाला मैनुअल में दी गई गतिविधियाँ भी कर सकते हैं। इसी प्रकार का प्रयोगशाला मैनुअल राज्य स्तर पर अन्य भाषाओं में भी उपलब्ध होगा।

दृष्टिबाधित विद्यार्थियों के लिए उपरोक्त गतिविधियों को करने हेतु विशेष रूप से डिज़ाइन किए गए रूलर, चाँदा और कंपास हैं।

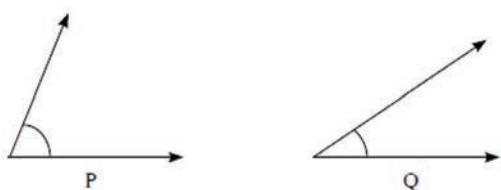
आकलन— गलत धारणाएँ और सहायक उपकरण

कोणों की तुलना करना

- विद्यार्थी निम्नलिखित प्रकार से कोणों के एक जोड़ो की तुलना कर सकते हैं—



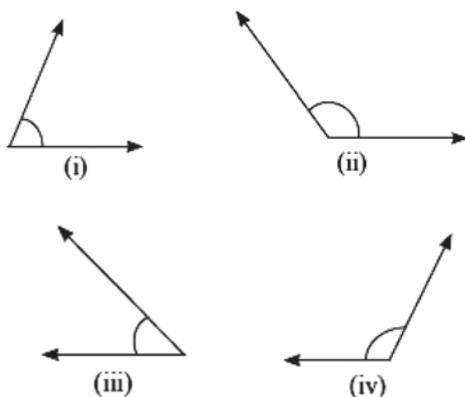
- कुछ विद्यार्थी कह सकते हैं कि कोण A, कोण B से बड़ा है, क्योंकि कोण A की भुजाएँ कोण B की तुलना में अधिक लंबी हैं। यदि ऐसा है तो हो सकता है कि वह कहें कि कोणों की तुलना भुजाओं की लंबाई के अनुसार नहीं की गई है। उन्हें बताएँ कि कोणों की तुलना दोनों भुजाओं के बीच के खुले स्थान के अनुसार की जाती है।
- इसी प्रकार, विद्यार्थियों को निम्नलिखित कोणों के एक जोड़े की तलना करने के लिए कहें—



- कुछ विद्यार्थी कह सकते हैं कि कोण Q, कोण P से बड़ा है, क्योंकि कोण Q की चाप कोण P की चाप से बड़ी है। यहाँ फिर से यह इंगित किया जा सकता है कि कोणों की लंबाई चाप (आर्क) की लंबाई के अनुसार नहीं है। उनकी तुलना दोनों भुजाओं के बीच के खुले स्थान के अनुसार की जाती है।

कोण मापना

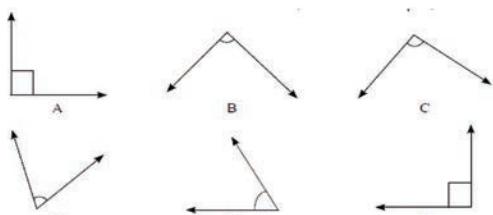
- विद्यार्थियों से निम्न प्रकार के कोणों को मापने के लिए कहें।



- कुछ विद्यार्थी कोण (iii) को 30° के बजाय 150° माप सकते हैं। इसी तरह, कुछ विद्यार्थी कोण (iv) को 120° के बजाय 60° तक माप सकते हैं। यदि ऐसा है तो विद्यार्थियों को चाँदे के किनारे पर उचित स्केल का उपयोग करने के लिए कहें।
- कुछ विद्यार्थी इस कोण को चाँदे से किसी एक भुजा की रेखा पर रखने के बजाय सीधे किनारे पर रखकर कोण को माप सकते (0° – 180° वा 180° – 0°) है। यदि ऐसा है, तो विद्यार्थियों को उचित तरीके से चाँदे का उपयोग करने की विधि बताएँ।

समकोण

- विद्यार्थियों से निम्नलिखित में से समकोण की पहचान करने के लिए कहें—



- कुछ विद्यार्थी केवल कोण A को समकोण के रूप में पहचान सकते हैं। हालाँकि, इस मामले में; कोण A, F और C समकोण हैं और अन्य समकोण नहीं हैं। इसका अर्थ है कि विद्यार्थी कोण F या C को समकोण के रूप में नहीं पहचान रहे हैं। इसका कारण यह हो सकता है कि विद्यार्थियों को अक्सर समकोणों के नमूना उदाहरण दिए जाते हैं। नतीजतन, वे कोण की अन्य प्रस्तुतियों को नहीं पहचानते हैं। इसलिए, इस कमी को दूर करने के लिए, अध्यापक को सभी प्रकार के अभिविन्यासों में समकोण और अन्य कोणों को प्रस्तुत करना होगा।

उच्च प्राथमिक स्तर

नमूना 3

सीखने के प्रतिफल

इस उदाहरण में हम एक पूर्ण संख्या को एक भिन्न संख्या के साथ और किसी अन्य भिन्न संख्या से विभाजन की अवधारणा पर चर्चा करेंगे।

एक भिन्न संख्या के साथ एक पूर्ण संख्या का विभाजन आइए, हम देखें कि निम्नलिखित स्थिति में कैसे समाधान पा सकते हैं— हमारे पास 2 चॉकलेट हैं। प्रत्येक चॉकलेट $\frac{1}{2}$ भागों में टूटी हुई है। सभी

विद्यार्थियों को चॉकलेट का एक-एक टुकड़ा दिया जाना है। कितने विद्यार्थियों को चॉकलेट मिलेगी?

पर्याप्त चर्चा के बाद विद्यार्थियों को इस निष्कर्ष पर पहुँचना चाहिए कि हमें दोनों चॉकलेट में आधे टुकड़ों का पता लगाने की आवश्यकता है और इसलिए $2 \div \frac{1}{2}$ निकाला जाना चाहिए।

वे आगे पता लगा सकते हैं कि ऐसे टुकड़ों की संख्या 4 है।

यह $2 \div \frac{1}{2} = 4$ है, अर्थात् 4 विद्यार्थियों को चॉकलेट का एक-एक टुकड़ा मिलेगा।

इसी प्रकार, तब क्या होगा जब चॉकलेट को $\frac{1}{3}$ भागों में बाँट दिया जाएगा। तब उपरोक्त चर्चा की तरह परिणाम पाने के लिए हमें $2 \div \frac{1}{3}$ करना होगा, जिसका निष्कर्ष होगा— $2 \div \frac{1}{3} = 6$

इसी तरह $2 \div \frac{1}{4} = 8$

इन्हें $2 \div \frac{1}{2} = 4$; $2 \div \frac{1}{3} = 6$; $2 \div \frac{1}{4} = 8$ के रूप में लिखा जा सकता है, और इसी तरह आगे भी विभाजित कर सकते हैं। विद्यार्थियों से पूछा जा सकता है कि क्या वे इसमें कोई पैटर्न देखते हैं। यदि हाँ, तो उनसे $3 \div \frac{1}{4} = ?$; $2 (\frac{1}{2}) \div = ?$ पूछा जा सकता है।

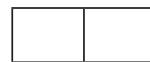
विद्यार्थियों को पैटर्न का निरीक्षण करने और एल्गोरिदम (भाग विधि) खोजने के लिए प्रेरित किया जा सकता है।

लिखित समस्या— एक विद्यालय में सातवीं कक्षा में 5 खंड हैं। क्षेत्र भ्रमण पर जाने के लिए कक्षा अध्यापकों को अपनी संबंधित कक्षा को $5/6$ वें भागों में विभाजित करने के लिए कहा गया। यदि प्रत्येक भाग को एक बस की आवश्यकता होती है, तो क्षेत्र भ्रमण के लिए कितनी बसों की आवश्यकता होगी?

समाधान— क्षेत्र भ्रमण के लिए आवश्यक बसों की संख्या 5 खंडों में कुल भागों के बराबर है। यह दिया गया है, इसलिए

$$5 \div \frac{5}{6} = 5 \times \frac{6}{5} = 6$$

इस प्रकार, क्षेत्र भ्रमण के लिए 6 बसों की आवश्यकता होगी।



नमूना 4

सीखने के प्रतिफल

एक विद्यार्थी दो पूर्णांकों को गुणा करता है।



यह विद्यार्थी पूर्णांकों को जोड़ने और घटाने के बारे में अवगत है। गुणन की अवधारणा को अब पेश किया जाना है। ऐसा करने के लिए विद्यार्थी को कुछ गतिविधियों में संलग्न किया जा सकता है जिससे विद्यार्थियों को पूर्णांकों की गुणन प्रक्रिया को समझने में मदद मिलेगी।

बच्चे, पैटर्न के बारे में पर्याप्त रूप से जानते हैं। हम उन गतिविधियों के बारे में सोच सकते हैं जो पैटर्न और उन अवधारणाओं पर आधारित हैं जो पहले से ही विद्यार्थियों को ज्ञात हैं। इससे वे दो पूर्णांकों के गुणनफलों की अवधारणा को विकसित कर सकेंगे।

आइए, गुणनफलों के प्रकार के साथ शुरू करें— धनात्मक पूर्णांक \times ऋणात्मक पूर्णांक = ऋणात्मक पूर्णांक

गतिविधि 1

एक अवस्था $2 \times (-3)$ लें।

बच्चों ने अपनी प्राथमिक कक्षाओं में प्राकृतिक संख्याओं का गुणन सीखा है। तब संख्या को जोड़ने की अवधारणा का उपयोग किया गया था। उदाहरण के लिए, 2×3 का अर्थ 3 को दो बार जोड़ना होगा, अर्थात् $3 + 3 = 6$ । अध्यापक विद्यार्थियों को इस प्रक्रिया को याद करने के लिए कह सकते हैं कुछ और उदाहरणों पर चर्चा की जा सकती है, जैसे 5×4 , 6×8 आदि।

इससे विद्यार्थियों को संख्याओं को जोड़ना सिखाने के बाद ही परिचित किया जाता है।

विद्यार्थियों से अब चर्चा करने के लिए कहा जा सकता है कि क्या इसी प्रक्रिया का उपयोग $2 \times (-3)$ खोजने के लिए कर सकते हैं। वे पूर्णांकों को जोड़ने के बारे में जानते हैं। पर्याप्त चर्चा के बाद कक्षा इस नतीजे पर पहुँच सकती है।

$$\text{इस प्रकार, } 2 \times (-3) = (-3) + (-3) = -6$$

चर्चा के दौरान यह देखा जा सकता है कि विद्यार्थी प्राथमिक कक्षाओं में अध्ययन किए गए अंकों की गुणा के विचार को जोड़ने में सक्षम हैं या नहीं। इसे कैसे कर सकते हैं, इस पर चर्चा हो सकती है।

एक धनात्मक और ऋणात्मक पूर्णांक के गुणनफल का एक विचार देने के लिए इसी तरह के उदाहरण दिए जा सकते हैं।

ऐसा करने का एक और तरीका निम्न गतिविधि में सुझाया गया है।

गतिविधि 2

इसमें -3 को दो बार जोड़ने का विचार भी किया जा सकता है, जैसा संख्या-रेखा में दिखाया गया है।

$$-3 \times 2$$

ऋणात्मक दिशा में -3 को दो बार जोड़ने का अर्थ है $(-3) + (-3)$ और हम -6 तक पहुँचते हैं। -3×3 $(-3) + (-3) + (-3)$ का अर्थ होगा ऋणात्मक दिशा की ओर -3 को तीन बार जोड़ना। इस प्रकार, हम -9 तक पहुँचते हैं।

पूर्णांकों को जोड़ने की इस दृश्य प्रस्तुति से विद्यार्थियों का ध्यान आकर्षित होगा और न केवल गुणनफलों को खोजने में संलग्न होंगे, बल्कि गुणनफल के संकेत की व्याख्या भी करेंगे।

विद्यार्थियों को अपना निष्कर्ष निकालने के लिए प्रेरित किया जा सकता है। ऐसे विभिन्न गुणनफलों के उदाहरण लें।

विद्यार्थी, किसी अन्य गतिविधि में भी संलग्न हो सकते हैं ताकि उन्हें एक ही अवधारणा प्राप्त करने का एक अलग तरीका मिल सके।

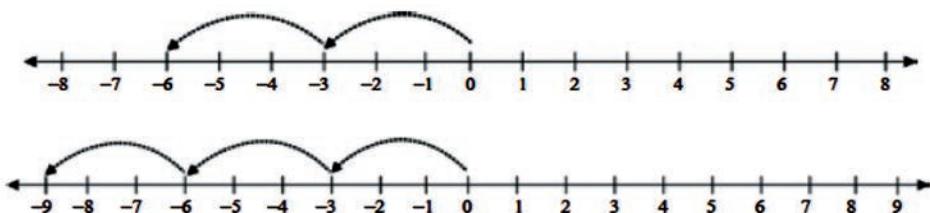
गतिविधि 3

पैटर्न का उपयोग उसी परिणाम पर पहुँचने के लिए किया जा सकता है।

$$-3 \times 2 \text{ प्राप्त करने के लिए, हम कहते हैं, } 3 \times 2$$

विद्यार्थियों को यह ज्ञात है कि—

$$3 \times 2 = 6 \dots (1)$$



$$2 \times 2 = 4 \dots (2)$$

$$1 \times 2 = 2 \dots (3)$$

$$0 \times 2 = 0 \dots (4)$$

यह देखने के लिए चर्चा की जा सकती है कि क्या $6, 4, 2, 0$ गुणनफलों को प्राप्त करने में कुछ पैटर्न विकसित होते हैं? यह इस तथ्य के लिए तय किया जा सकता है कि चरण (2) में $4 = 6 - 2$; चरण (3) में, $2 = 4 - 2$; चरण (4) में $0 = 2 - 2$; तात्पर्य यह है कि प्रत्येक क्रमिक चरण में गुणनफल से 2 घटाया जा रहा है। इसलिए इस तर्क को आगे बढ़ाते हुए,

$$-1 \times 2 = 0 - 2 = -2$$

$$-2 \times 2 = (-2) - 2 = -4$$

$$-3 \times 2 = (-4) - 2 = -6$$

तो अंत में हम $(-3) \times 2 = 6$ प्राप्त करते हैं।

इस पद्धति का उपयोग करके ऐसे गुणनफलों की अधिक संख्या पर चर्चा की जा सकती है।

अब हम (ऋणात्मक पूर्णांक) \times (ऋणात्मक पूर्णांक) का उदाहरण लेते हैं। इस पर चर्चा की जा सकती है कि क्या पहले की गतिविधियों में इस्तेमाल की जाने वाली तकनीक का इस्तेमाल यहाँ भी किया जा सकता है। पैटर्न की प्रक्रिया के बारे में अंत में सोचा जा सकता है।

आइए, हम गुणनफल $(-3) \times (-2)$ लें।

गतिविधि 4

आइए, हम $(-3) \times 3 = -9 \dots (1)$ से शुरू करें।

अब पहले की गतिविधियों में विद्यार्थियों को यह पता है कि—

$$(-3) \times 2 = -6 \dots (2)$$

$$(-3) \times 1 = -3 \dots (3)$$

$$(-3) \times 0 = 0 \dots (4)$$

विद्यार्थियों को प्राप्त गुणनफलों के पैटर्न का निरीक्षण करने के लिए कहें। यहाँ आप यह आकलन कर सकते हैं कि विद्यार्थियों ने एक ऋणात्मक पूर्णांक के गुणनफल और इस प्रक्रिया से ठीक पहले किए गए धनात्मक पूर्णांक के बारे में समझ लिया है अथवा नहीं, और वे इसे यहाँ लागू करने में सक्षम हैं या नहीं। इसके अलावा, अध्यापक यह भी देख सकते हैं कि विद्यार्थी गुणनफलों में पैटर्न देख पा रहे हैं या नहीं और वे इसे आगे कैसे बढ़ा सकते हैं।

यह देखा जा सकता है कि चरण (2) में, $-6 = (-9) + 3$; चरण (3) में, $-3 = (6) + 3$; चरण (4) में $0 = (-3) + 3$

इस पैटर्न को देखने के बाद हम इसे और आगे बढ़ाते हैं, जैसे

$$(-3) \times (-1) = 0 + 3 = 3$$

$$(-3) \times (-2) = 3 + 3 = 6$$

तो अंत में हमें $(-3) \times (-2) = 6$ मिलता है।

विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिए कुछ और उदाहरण दिए जा सकते हैं। विद्यार्थियों को उदाहरण बनाने और इन्हें एक-दूसरे को देने के लिए भी प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

विद्यार्थियों से पूर्णांक के प्रकार (यानी, धनात्मक या ऋणात्मक) के बारे में पूछा जा सकता है, जो उन्हें चर्चा किए गए उपरोक्त दोनों गुणनफलों में मिलते हैं। विद्यार्थियों द्वारा किए गए अवलोकन का आकलन किया जा सकता है। इसमें निम्नलिखित के बारे में विद्यार्थियों से पूछा जा सकता है—

गुणनफलों के लिए प्राप्त पूर्णांक का संकेत क्या है, $(-1) \times (-1)$; $(-1) \times (-1) \times (-1)$; $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$; $(-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1)$?

$$(-1) \times (-1); (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1), (-2) \times (-3) (-5) \dots$$

दो पूर्णांकों के गुणनफल को पेश करने के बाद यह आवश्यक है कि विद्यार्थियों को इस तरह के गुणन की आदत हो। दो पूर्णांकों को गुणा करने के लिए केवल अभ्यास देने के बजाय उन्हें खेलने के लिए एक खेल दिया जा सकता है जिसमें कई बार पूर्णांकों को गुणा करने की आवश्यकता होती है।

खेल

खेल, विद्यार्थियों को रोमांच, खुशी, हताशा और आनंद की भावना दे सकते हैं। गणित पढ़ाने में खेलों का उपयोग करने से गणित के प्रति बेहतर दृष्टिकोण, उन्नत प्रेरणा और बच्चों की समस्या सुलझाने की क्षमताओं के विकास में सहायता मिलती है। गणितीय खेल खेलते समय होने वाली गणितीय चर्चाएँ गणितीय समझ के विकास की ओर ले जाती हैं।

कागज की एक बड़ी शीट पर (साँप-सीढ़ी या शतरंज के खेल के समान) 19 पंक्तियों और 11 स्तंभों के साथ छोटे बक्से खींचे जाते हैं। उनमें –104 से 104 तक सख्तियाँ लिखी जाती हैं।

- एक थैला लें, जिसमें दो नीले और दो लाल पासे (डाइस) रखें। रंगीन पासे में से एक पर डॉट्स की संख्या धनात्मक पूर्णांक का प्रतिनिधित्व कर सकती है और दूसरे रंग के पासे से ऋणात्मक पूर्णांक का। विद्यार्थियों को इसके बारे में निर्णय लेने की अनुमति दी जा सकती है। वर्तमान उदाहरण में लाल रंग के पासे पर डॉट्स की संख्या धनात्मक पूर्णांक और अन्य रंग ऋणात्मक पूर्णांक का प्रतिनिधित्व करते हैं।

- कक्षा को विभिन्न समूहों में विभाजित करें। समूह का आकार विद्यार्थियों की मदद से तय किया जा सकता है। प्रत्येक समूह में विद्यार्थी खेल खेलेंगे। मान लीजिए समूह का आकार 4 है।
- प्रत्येक खिलाड़ी अपने काउंटर 0 अंक पर लगाएगा।
- प्रत्येक खिलाड़ी थैले में पासा डालेगा और इसे देखे बिना दो पासे निकालेगा। पासे एक ही रंग या विभिन्न रंगों के हो सकते हैं।
- खिलाड़ी को बाहर निकाले गए पासे पर संख्याओं को गुणा करना होगा।
- यदि पासे एक ही रंग के हों तो संख्याओं का गुणनफल धनात्मक होगा, अन्यथा यह ऋणात्मक होगा।
- यदि गुणनफल धनात्मक है तो खिलाड़ी को, काउंटर को 104 की ओर ले जाना चाहिए और यदि यह ऋणात्मक है तो काउंटर को –104 की ओर ले जाना चाहिए।
- जो 104 या –104 तक पहले पहुंचता है, वह विजेता होता है।

इस खेल को खेलते समय विद्यार्थी कई बार पूर्णांक को गुणा करेंगे और अपने समूह में दूसरों को ऐसा करते हुए देखेंगे। विद्यार्थी पूर्णांक के गुणन से संबंधित तथ्यों से भी परिचित होंगे।

एक अध्यापक के रूप में आपको यह जानने का अवसर मिलता है कि क्या विद्यार्थी पूर्णांक के गुणनफल के साथ काम करने में सक्षम हैं।

नमूना 5

सीखने के प्रतिफल

विद्यार्थी घनाकार वस्तुओं का पृष्ठीय क्षेत्रफल निकालने में सक्षम होता है।

घनाकार वस्तुओं का आयतन ज्ञात करने में सक्षम होता है।

अधिगम के उद्देश्य

इस गतिविधि के पूरा होने के बाद विद्यार्थी—

घन और घनाभ बनाएँ और उनके पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए सूत्र प्राप्त करें।

घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिए एक सूत्र प्राप्त करें।

गतिविधि 1

सामग्री की आवश्यकता

कार्डबोर्ड, रूलर, कटर, सेलो टेप, स्केच पेन/ पेंसिल, सफेद पेपर, चार्ट पेपर

प्रक्रिया

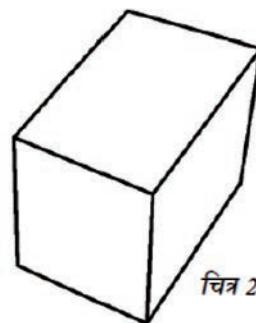
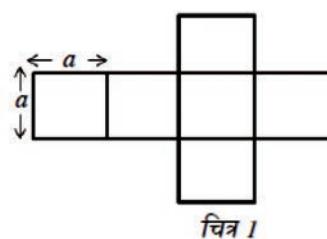
विद्यार्थियों को प्रत्येक समूह में चार विद्यार्थियों के समूहों में विभाजित किया जा सकता है। विद्यार्थियों को कार्डबोर्ड, रूलर, कटर, सेलो टेप, स्केच पेन/ पेंसिल, सफेद पेपर, चार्ट पेपर आदि दिए जाने चाहिए।

विद्यार्थियों को चित्र 1 में दर्शाएँ अनुसार भुजा a इकाई के छह समान वर्गों को मिलाकर एक आकृति बनाने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए।

चित्र 2 में दर्शाएँ अनुसार एक ठोस बनाने के लिए पंक्तियों के निशान के साथ वर्गों को मोड़ें।

चर्चा/प्रदर्शन

यह चर्चा की जा सकती है कि चित्र में किस तरह का ठोस प्राप्त किया गया है। यह एक घन है। विद्यार्थी बता सकते हैं कि यह घन क्यों है। इससे अध्यापक को यह देखने का अवसर मिलेगा कि विद्यार्थियों को किसी घन की विशेषताओं के बारे में पता है या नहीं।



घन का प्रत्येक फलक भुजा 'a' का एक वर्ग है। इसलिए, घन के एक फलक का क्षेत्रफल a^2 होता है। एक घन में कुल पृष्ठों की संख्या 6 होती है। इसलिए, एक घन का पृष्ठीय क्षेत्रफल $6a^2$ होता है।

गतिविधि 2

विचार-विमर्श

घनाकार वस्तु में कितनी भुजाएँ होती हैं?

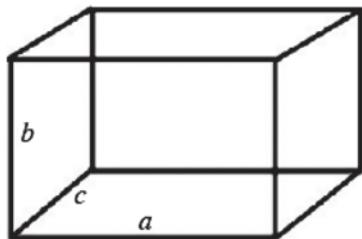
विद्यार्थी, अपने परिवेश में इस तरह के विभिन्न आकार, रबड़, बॉक्स, कमरे आदि के बारे में अवलोकन और चर्चा करने के बाद, घनाभ के बारे में बात कर सकते हैं और उपरोक्त प्रश्नों का जवाब दे सकते हैं। इससे अध्यापक को यह भी पता चलेगा कि विद्यार्थियों को घनाभ के बारे में कितना पता है।

चित्र 3 में दिए गए घनाभ की भुजाओं a , b और c का निरीक्षण करें—

विद्यार्थियों ने 2D आकार के क्षेत्रफलों के बारे में सीखा है। उन्हें यह बताने के लिए कहा जा सकता है कि प्रत्येक फलक का आकार क्या है? क्या सभी फलक एक ही आकार के हैं? इनमें से कौन-से एक समान हैं और कौन-से नहीं हैं?

अब विद्यार्थी दिए गए आयामों के साथ 3D आकार के बारे में बात कर सकते हैं।

किसी ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बारे में जानने के लिए पर्याप्त समय और चर्चा की जा सकती है। विद्यार्थियों को यह महसूस करना चाहिए कि यह सभी फलक के क्षेत्रफलों का योग है।



चित्र 3

घनाभ के सामने/पीछे के भाग का क्षेत्रफल a और b इकाई $= ab$ होता है।

आगे और पीछे के फलक का कुल क्षेत्रफल $= ab + ab = 2ab$

दोनों भुजाओं के फलक का कुल क्षेत्रफल a और c इकाई $= ac + ac = 2ac$ है।

शीर्ष और निचले फलक का कुल क्षेत्रफल b और c इकाई $= bc + bc = 2bc$

कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2ab + 2bc + 2ca = 2(ab + bc + ca)$

यदि $a = b = c$ तो कुल पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2a^2 + 2a^2 + 2a^2 = 6a^2$

गतिविधि 3

सामग्री की आवश्यकता

एक घनाभ का जाल, प्लास्टिक मिट्टी, कटर, रूलर, कार्डबोर्ड

प्रक्रिया

लंबाई l , चौड़ाई b और ऊँचाई h वाले घनाभ का एक जाल ले (मान लें कि $l = 4, b = 4, h = 3$)

- इसे एक खुला घनाभ बनाने के लिए मोड़ें।
- इस घनाभ को मिट्टी/प्लास्टिक से भरें और जाल को हटा दें।
- कार्डबोर्ड में घनाभ को रखें और इसकी लंबाई l के साथ चार बराबर टुकड़ों में काट लें। (चित्र 4)
- इसकी चौड़ाई b के बराबर टुकड़ों के साथ घनाभ काटें। (चित्र 5)
- घनाकार को तीन बराबर टुकड़ों में काटें जिसकी ऊँचाई h है। (चित्र 6)

विचार-विमर्श

घनाभ को इकाई लंबाई के घनों में विभाजित किया गया है।

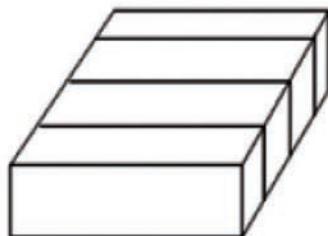
बनने वाले इकाई घनों की संख्या 48 है, जिसे $4 \times 4 \times 3$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

विद्यार्थी $1 \times 1 \times 1$ परिमाप वाले घन के आयतन के बारे में बता सकते हैं।

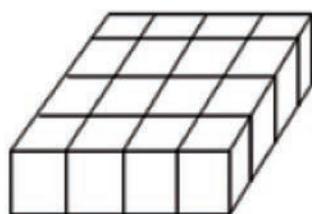
घनाभ का आयतन $= 4 \times 4 \times 3$ घन इकाइयाँ हैं, अर्थात् $l \times b \times h$

इसी प्रकार, विद्यार्थियों को 2, 4, 4 इकाइयों के विभिन्न परिमापों के घनाभ बनाने के लिए कहा जा सकता है; उनसे 3, 4, 5 इकाइयों और घन की संख्या आदि का निरीक्षण करने के लिए कहें।

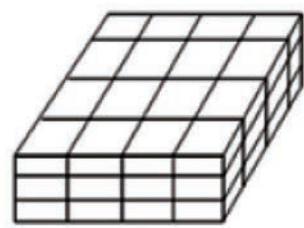
इस गतिविधि का उपयोग घनाभ के आयतन के सूत्र को समझाने में किया जा सकता है जो कि $l \times b \times h$ है। चर्चा के दौरान अध्यापक यह देख सकते हैं कि विद्यार्थी सामान्यीकृत सूत्र कैसे अपनाते हैं।



चित्र 4



चित्र 5



चित्र 6