पूर्णांकों को हमने कैसे समझा?

सुधांशु शर्मा*
संतोष कुमार गुप्ता**

राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020 भारत को वैश्विक पटल पर दृढ़ता से स्थापित करने हेतु प्रतिबद्ध है, जिसके निहितार्थ हेतु भारत के बुनियादी स्तर के प्रत्येक विद्यार्थी को बुनियादी संख्यात्मक संक्रियाओं को सिखाने का लक्ष्य रखा गया है ताकि जब स्वतंत्र भारत के शताब्दी वर्ष 2047 में प्रवेश करें तो प्रत्येक विद्यार्थी बुनियादी संख्या ज्ञान में पारंगत हो और वह राष्ट्र निर्माण में अपना योगदान देने में सक्षम हो। इस शोध-पत्र में कक्षा 8 के विद्यार्थियों द्वारा गणित के पूर्णांकों को हल करने में की गई त्रुटियों पर शोध अध्ययन कर प्रस्तुत किया गया है। इसमें यह ज्ञात हुआ है कि कक्षा 8 के विद्यार्थियों को अभी भी पूर्णांकों जैसी महत्वपूर्ण संख्याओं की संक्रियाओं को हल करने में समस्याओं का सामना करना पड़ रहा है। इसके साथ ही, पूर्णांकों को हल करते समय विद्यार्थियों द्वारा किस प्रकार की सामान्य त्रुटियाँ होती हैं, उनको पहचानने तथा उनके निवारण हेतु शिक्षक को अपनी कक्षा में विभिन्न युक्तियों को अपनाने का सुझाव दिया गया है।

एक राष्ट्र के भविष्य को विद्यार्थियों की गणितीय संक्रियाओं में आधारभूत समझ को विकसित करके सकारात्मक दिशा में आगे बढ़ाया जा सकता है। *राष्ट्रीय शिक्षा नीति 2020* आधारभूत संख्यात्मक संक्रियाओं की साक्षरता पर बात करती है जो विद्यालयी शिक्षा के लिए अनिवार्य एवं पूर्वापेक्षित है। इसके अतिरिक्त *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005* भी 'गणितीयकरण' को समर्थन प्रदान करती है। विद्यालयी गणित का उद्देश्य भी 'उपयोगी' क्षमताओं को विकसित करना है, जो विशेष रूप से संख्या ज्ञान, संख्या संक्रियाएँ, मापन, दशमलव ज्ञान एवं प्रतिशतता से संबंधित जटिल संक्रियाएँ हैं। उच्च गणितीयकरण के लिए यह आवश्यक है कि विद्यार्थियों को अधिगम के प्रारंभिक चरण से ही संख्या गणना एवं संख्यात्मक संक्रियाओं का उचित ज्ञान एवं समझ हो, जैसे किन्हीं दो राशियों का योगफल एवं ऋणफल तथा दो राशियों का गुणनफल एवं भागफल करने में निपुणता प्राप्त हो, जिससे मूर्तता से अमूर्तता की दिशा में अग्रसर हो सकें।

एक शिक्षक के लिए यह अत्यंत अप्रिय अनुभव होता है कि प्राथमिक स्तर के विद्यार्थियों को संख्यात्मक-संक्रियाओं की समझ व प्रयोग करने का पर्याप्त एवं समुचित अभ्यास नहीं होता है। प्रायः गणित की संख्यात्मक-संक्रियाओं की

**शोधार्थी*, सेंटर फॉर एजुकेशन एंड टेक्नोलॉजी फॉर एजुकेशन, भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान, करवड़, जोधपुर 342 030
***शोधार्थी*, शिक्षा एवं शैक्षिक प्रौद्योगिकी विभाग, हैदराबाद विश्वविद्यालय, हैदराबाद 500 046

भूमिका महत्वपूर्ण होती है, जिसके अभाव में गणित की संकल्पना आधारहीन है। चूँकि इन संख्याओं का अति महत्वपूर्ण अंश 'पूर्णांकों' की संक्रियाओं से अंतःसंबंधित होना है, जिसमें उनका योगफल, ऋणफल, गुणनफल एवं भागफल परस्पर सम्मिलित है। यदि कोई विद्यार्थी पूर्णांकों की संक्रियाओं को समझने में विफल रहता है तो संभवतः विद्यार्थी के अंतर्मन में गणित विषय को छोड़ने अथवा नापसंद करने की दुविधा उत्पन्न हो जाएगी। गणित के प्रति रुचि एवं उसका समुचित बोध सुनिश्चित करने हेतु प्रासंगिक गणित शिक्षणशास्त्र का उपयोग करके सरल भाषा में गणित के विचारों को व्यापक एवं सामान्यीकृत करके समझाना चाहिए, जिससे विद्यार्थियों में गणितीय अवधारणाओं का उचित ज्ञान और समझ विकसित हो सके।

यह स्पष्ट है कि विद्यार्थी के अपने कई अनुभव होते हैं, जिनमें से पूर्व-कक्षाओं में अर्जित अधिगम कार्यों के अनुभवों से संबंधित होते हैं। जब भी विद्यार्थी को कोई कार्य करने को दिया जाता है, तब वह अपने पूर्वज्ञान एवं अधिगम पर निर्भर रहता है। तत्पश्चात, वे उसी के अनुसार अर्थनिर्वचन करते हैं। प्रायः गणित में ये पूर्व धारणाएँ अधिगम प्रक्रिया में अड़चन उत्पन्न करती हैं, जिसके परिणामस्वरूप विद्यार्थी त्रुटियाँ करता है तथा गलत गणितीय धारणाएँ विकसित कर लेता है। गणित में त्रुटियाँ कई स्तरों पर होती हैं, जो समझ के अभाव से लेकर अंकों की गलत गणितीय संकल्पनाओं आदि की हो सकती हैं। स्रोत जो भी हो, जब ये त्रुटियाँ विशेष पैटर्न दर्शाती हैं, तब यह संकल्पनात्मक समझ एवं संरचना या रूपरेखा के अभाव को प्रतिबिंबित करती हैं। इसलिए विद्यार्थियों की इन गणितीय त्रुटियों की ओर ध्यान दिया जाए तथा उनका अवलोकन एवं विश्लेषण कर सार्थक समाधान करने का प्रयास किया जाए।

अध्ययन की आवश्यकता

वर्तमान संदर्भ में संज्ञानात्मक अर्थात मूलभूत दक्षताओं और तार्किक गणितीय क्षमताओं के प्रभावी विकास के लिए, गणितीय कौशल के सशक्त बुनियादी आधार की आवश्यकता है, चूँकि यह प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से अन्य विषयों, जैसे— विज्ञान, प्रौद्योगिकी, अभियांत्रिकी, कला, मानविकी इत्यादि के साथ संबद्ध है। इसके अलावा, प्रारंभिक गणित की नींव अंकगणित के अधिगम और विशेष रूप से पूर्णांकों से संबंधित प्रश्नों के हल करने के ज्ञान पर निरूपित होती है। अतः यह अत्यधिक अनुशंसित है कि आवश्यक गणितीय कौशल और अभिक्षमताओं की वृद्धि हेतु, विद्यार्थियों का बुनियादी आधार अत्यधिक सुदृढ़ हो, जिससे उच्च शिक्षा की प्राप्ति में किसी भी प्रकार की बाधा न उत्पन्न हो। चूँकि प्रत्येक बच्चा एक सामर्थ्यवान विद्यार्थी है। इसलिए शिक्षक का यह कर्त्तव्य है कि विद्यार्थी को अधिगम हेतु अनुकूल एवं प्रभावी वातावरण प्रदान करें। अतः शिक्षक से यह अपेक्षित है कि विद्यार्थियों को इस प्रकार से पोषित करें कि वे इन बुनियादी गणितीय कौशल के ज्ञान को अर्जित कर सकें और यह केवल तभी संभव है, जब शिक्षक को विद्यार्थियों द्वारा पूर्णांकों की संक्रियाओं पर आधारित प्रश्नों को हल करते समय की गई अपेक्षित त्रुटियों का पूर्वज्ञान हो, जिससे उनका प्रारंभिक चरण में ही सुधार हो सके।

संक्रियात्मक परिभाषाएँ

- **गणितीय अधिगम**— इनसाइक्लोपीडिया ऑफ साइंसेज ऑफ लर्निंग के अनुसार "गणितीय अधिगम को मुख्यतः राशियों, स्थान एवं संरचनाओं से संबंधित प्रभावों और नवीन ज्ञान एवं कौशलों को अर्जित करने के रूप में परिभाषित किया गया है।" सरल शब्दों में इसे तथ्यों, संक्रियाओं, अवधारणाओं, उपमानों इत्यादि के ज्ञानार्जन की प्रक्रिया, विशेषज्ञता और बोध के रूप में परिभाषित किया गया है।
- **पूर्णांक संख्याएँ**— ब्रिटानिका के अनुसार "पूर्णांक संख्याएँ, धनात्मक, ऋणात्मक तथा शून्य परिमाण वाली पूर्ण संख्याएँ हैं। पूर्णांकों की उत्पत्ति गणन-संख्याओं के समुच्चय 1, 2, 3, ... एवं उनकी ऋणात्मक संक्रियाओं के द्वारा होता है।" अतः पूर्णांकों को प्रचलित भाषा में ऐसी संख्याएँ कहा गया है, जिन्हें बिना 'भिन्न घटकों (Fractional components)' में व्यक्त एवं लिखा जा सके। पूर्णांक, पूर्ण संख्याओं एवं ऋणात्मक संख्याओं का समुच्चय है। उदाहरण— 21, 4, 0, −3, −9, −100, 1234 इत्यादि।
- **गणितीय संक्रियाएँ**— गणितीय संक्रियाएँ, संकार्यों (Operand) एवं गणितीय संक्रियक (Math operators) का प्रयोग कर किसी राशि की गणना करने के रूप में संदर्भित किया गया है। गणितीय संक्रियक के प्रतीकों के नियम पूर्व-निर्धारित व क्रमबद्ध होते हैं, जिनका अनुप्रयोग दिए गए संकार्यों में किया जाता है।

शोध के उद्देश्य

शोध अध्ययन के उद्देश्य इस प्रकार हैं—

- पूर्णांकों की संक्रियाओं को हल करते समय विद्यार्थियों द्वारा की गई सामान्य त्रुटियों की पहचान करना।
- विद्यार्थियों द्वारा पूर्णांकों की संक्रियाओं को हल करते समय सामान्य त्रुटियों को करने के संभावित कारणों को विश्लेषित करना।

विषय की पृष्ठभूमि

देश में हुए शोध अध्ययनों से यह ज्ञात होता है कि कई हस्तक्षेपों एवं आर्थिक निवेश के उपरांत भी भारतीय प्रारंभिक विद्यालयों का परिदृश्य एवं स्थिति चिंताजनक है। स्कूल शिक्षा एवं साक्षरता विभाग, भारत सरकार द्वारा प्रकाशित *राष्ट्रीय उपलब्धि सर्वेक्षण 2021* का अवलोकन करने पर यह ज्ञात होता है कि कक्षा 8 के विद्यार्थियों का गणित में राष्ट्रीय औसत उपलब्धि प्राप्तांक 500 में 253 प्राप्त हुआ है, जो गणित अधिगम के लिए एक चिंता का विषय है। असर गैर-सरकारी संगठन द्वारा *द एनुअल स्टेटस ऑफ एजुकेशन रिपोर्ट 2019* में बताया गया है कि विगत वर्षों में अधिगम प्रक्रिया में अत्यंत अल्प सुधार हुआ है, जैसे कक्षा 8 में 56 प्रतिशत विद्यार्थी तीन अंकीय संख्या को एक अंकीय संख्या से विभाजित करने में विफल रहे। कक्षा 5 के 72 प्रतिशत विद्यार्थी विभाजन करने में बिल्कुल ही असमर्थ रहे और कक्षा 3 के 70 प्रतिशत विद्यार्थी किसी भी प्रकार की ऋणात्मक संक्रियाएँ करने में अक्षम थे। कक्षा 8 के लगभग 56 प्रतिशत विद्यार्थी बुनियादी गणित कर पाने में एवं 27 प्रतिशत पढ़ पाने में असमर्थ थे। यह भारतीय

शिक्षा प्रणाली के लिए अत्यंत ही चिंताजनक विषय है।

अतः उपर्युक्त वर्णित तथ्यों एवं आँकड़ों के आधार पर शोधार्थियों द्वारा इस विषय पर शोध अध्ययन किया गया।

शोध प्रविधि

इस शोध अध्ययन को गवेषणात्मक शोध अभिकल्प (एक्सप्लोरेटरी रिसर्च डिजाइन) के द्वारा दो चरणों में पूर्ण किया गया था, जिसमें प्रथम चरण उपयुक्त प्रश्न-पत्र निर्मित करने एवं द्वितीय चरण विद्यार्थियों की लिखित प्रतिक्रियाएँ प्राप्त करने से संबंधित था।

शोध उपकरण

इस शोध अध्ययन के लिए शोधार्थियों द्वारा संदर्भ अनुरूप एक संरचित-परीक्षण (स्ट्रक्चर्ड टेस्ट) का निर्माण किया गया था। परीक्षण निर्माण का आधार ब्लूम के शैक्षिक उद्देश्यों के वर्गीकरण था, जिससे विद्यार्थियों के संज्ञानात्मक, भावात्मक एवं क्रियात्मक पक्षों को प्रभावशाली रूप से आकलित किया जा सके। परीक्षण निर्माण में प्रश्नों का निर्माण राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् द्वारा प्रकाशित (वर्ष 2020 में) कक्षा 8 की गणित की पाठ्यपुस्तक के आधार पर किया गया था। यह प्रश्न, पूर्णांकों की विभिन्न संक्रियाओं पर आधारित थे। इस परीक्षण में विद्यार्थियों के आकलन एवं सामान्य त्रुटियों की पहचान करने के लिए वस्तुनिष्ठ एवं विषयनिष्ठ प्रकार के प्रश्नों को शामिल किया गया था। प्रश्न, पूर्णांकों के तथ्यात्मक ज्ञान एवं समझ तथा उन्हें विभिन्न परिस्थितियों में अनुप्रयोग करने पर आधारित थे।

परीक्षण की फेस वैधता

सामान्यतः फेस वैधता अनौपचारिक एवं व्यक्तिनिष्ठ या विषयनिष्ठ होती है। परीक्षण की भाषा के स्तर एवं शुद्धता पर वैधता का मापन शिक्षा जगत के विद्वानों द्वारा किया गया था। परीक्षण की विषयवस्तु एवं शैक्षिक उपागम की वैधता का मापन भी गणित शिक्षणशास्त्र एवं शिक्षणशास्त्र के विद्वानों द्वारा किया गया था।

प्रतिदर्श

इस शोध अध्ययन में शोधार्थियों द्वारा कानपुर देहात, उत्तर प्रदेश के मंगलपुर पंचायत के चार ग्रामीण प्रारंभिक विद्यालयों का उद्देश्यपरक चयन किया गया था, जिनमें दो सरकारी विद्यालय एवं दो गैर-सरकारी विद्यालय थे। इन विद्यालयों में कक्षा 8 में अध्ययनरत समस्त विद्यार्थियों को अध्ययन में सम्मिलित किया गया था। इनकी संख्या 112 थी।

प्रदत्त संकलन

इस शोध अध्ययन हेतु शोधार्थियों द्वारा प्रदत्तों का संकलन मार्च एवं अप्रैल 2021 के मध्य किया गया था।

प्रदत्तों का विश्लेषण

इस शोध अध्ययन में संकलित तथ्यों एवं विद्यार्थियों द्वारा की गई सामान्य त्रुटियों का विश्लेषण सारणीबद्ध तरीके से किया गया था।

वस्तुनिष्ठ प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

बहुवैकल्पिक प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

इस परीक्षण में 5 बहुविकल्पीय प्रश्न थे, जो अग्रलिखित हैं—

प्र. 1 निम्नांकित में से 27 का योगज प्रतिलोम कौन-सा है ?

(क) 0 (ख) 1

(ग) −27 (घ) 72

प्र. 2 दो पूर्णांकों का योग −112 है। यदि उनमें से एक संख्या −109 है, तो दूसरी संख्या क्या होगी ?

(क) −3 (ख) +3

(ग) −221 (घ) इनमें से कोई नहीं

प्र. 3 (2+8) ÷ 0 =?

(क) 0 (ख) 1

(ग) 10 (घ) अपरिभाषित

प्र. 4 (−12) × 8 × 5 − 2 × 30 × 12

(क) 1824 (ख) −1200

(ग) −164 (घ) 200

प्र. 5 −8 संख्या, −3 से कितनी कम है ?

(क) 5 (ख) −5

(ग) 11 (घ) −11

विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उक्त प्रश्नों के उत्तर तालिका 1 में प्रदर्शित किए गए है।

तालिका 1— विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उत्तरों का विवरण

बहुविकल्पीय प्रश्न	सही उत्तर	गलत उत्तर	कोई उत्तर नहीं
प्र.1	82	28	2
प्र.2	16	86	10
प्र.3	6	98	8
प्र.4	31	64	17
प्र.5	30	79	3

सत्य या असत्य प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

इस परीक्षण में 5 सत्य या असत्य कथनों को सम्मिलित किया गया था तथा विद्यार्थियों को निर्देशित किया गया था कि यदि कोई कथन असत्य है तो कारण बताएँ। ये कथन निम्नवत हैं—

1. किसी पूर्णांक को शून्य से विभाजित करना अपरिभाषित होता है।
2. दो या दो से अधिक पूर्णांकों का योगफल, शेषफल अथवा गुणनफल सदैव पूर्णांक होता है।
3. 9× (8−7) = 9×8−9×7 वितरणात्मक (बंटन) गुण को दर्शाता है।
4. तापमान −43°C (सेंटीग्रेड), −12°C (सेंटीग्रेड) से अधिक है।
5. दो ऋणात्मक पूर्णांकों के योगफल से पुनः ऋणात्मक पूर्णांक प्राप्त होता है।

विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उक्त प्रश्नों के उत्तर तालिका 2 में प्रदर्शित किए गए हैं।

तालिका 2— विद्यार्थी द्वारा दिए गए उत्तरों का विवरण

सत्य या असत्य कथन	सही उत्तर	गलत उत्तर	कोई उत्तर नहीं
प्र.1	62	21	29
प्र.2	50	30	32
प्र.3	30	45	37
प्र.4	39	40	33
प्र.5	54	27	31

सुमेलन प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

इस परीक्षण में सुमेलित प्रश्न भी सम्मिलित किए गए थे, जिसमें 6 कथन थे। इन कथनों को तालिका 3 में दर्शाया गया है।

तालिका 3— सुमेलित प्रश्न

क्र.सं.	सूची – क	क्र.सं.	सूची – ख
(क)	−11 का क्रमानुयायी है	(1)	+9
(ख)	−7+(−7)	(2)	−17
(ग)	सहचारी गुण दर्शाता है	(3)	−10
(घ)	0÷ (−2+7)	(4)	−24
(ङ)	−9 − (+8)	(5)	0
(च)	(−15+3) ×2= ?	(6)	(2+5) +4=2+(5+4)
		(7)	−14

विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उक्त सुमेलन के उत्तर तालिका 4 में दर्शाए गए हैं।

तालिका 4— विद्यार्थी द्वारा दिए गए उत्तरों का विवरण

सुमेलन तालिका								
क्र.सं.	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(NA)
सुमेलन सूची	+9	−17	−10	−24	0	(2 + 5) + 4 = 2 + (5 + 4)	−14	
(क) −11 का क्रमानुयायी है	5	5	50	9	4	5	0	34
(ख) −7 + (− 7)	10	1	1	1	9	5	57	28
(ग) सहचारी गुण दर्शाता है	24	1	3	2	7	14	6	55
(घ) 0 ÷ (− 2 + 7)	17	8	2	2	35	9	8	31
(ङ) − 9 − (+ 8)	3	55	4	7	5	2	2	34
(च) (− 15 + 3) × 2 = ?	5	5	11	52	5	7	1	26

व्यक्तिनिष्ठ प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

1. संख्या रेखा प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

इस परीक्षण में संख्या रेखा पर − 10, −1, 6 और 4 को स्थित करने का प्रश्न था, जिसका उद्देश्य विद्यार्थियों के संख्या ज्ञान का आकलन करना था।

चित्र 1— परीक्षण में प्रयुक्त की गई संख्या रेखा

तालिका 5 — विद्यार्थी द्वारा दिए गए उत्तरों का विवरण

क्र.सं.	संख्या रेखा
अनुत्तरित	19
गलत उत्तरित	7
आंशिक सही उत्तरित	36
सुस्पष्ट उत्तरित	50
कुल	112

विद्यार्थियों द्वारा उक्त संख्या रेखा पर दिए गए अंकों को स्थित करने का विवरण तालिका 5 में दर्शाया गया है।

2. शब्द-प्रश्न एवं उनके निष्कर्ष

विद्यार्थी अपने व्यावहारिक जीवन में पूर्णांकों के ज्ञान का प्रयोग किस प्रकार करता है, इसका आकलन करने के लिए परीक्षण में तीन शब्द-प्रश्न सम्मिलित किए गए थे, ये प्रश्न निम्नवत हैं—

1. एक निश्चित प्रशीतन प्रक्रिया (ठंडा करने की प्रक्रिया) के लिए आवश्यक है कि 40°C कक्ष-तापमान को 5°C तापमान की दर से प्रत्येक घंटे कम किया जाए। प्रशीतन प्रक्रिया के शुरू होने के 10 घंटे बाद कक्ष-तापमान कितने °C होगा?
2. एक टैंकर में 500 लीटर पानी है। टैंकर में एक छोटा छिद्र होने के कारण, पानी की मात्रा 5 लीटर प्रति घंटे की दर से कम हो रही है तो बताइए कि 2 दिन बाद टैंकर में कितने लीटर पानी होगा?
3. एक स्थान समुद्र-तल से 50 मीटर ऊपर है तथा दूसरा स्थान समुद्र-तल से 20 मीटर नीचे है तो बताइए कि इन दो स्थानों के मध्य कितने मीटर का अंतर होगा?

तालिका 6— विद्यार्थी द्वारा दिए गए उत्तरों का विवरण

क्र.सं.	अनुत्तरित	गलत उत्तरित	आंशिक सही उत्तरित	सुस्पष्ट उत्तरित	कुल
प्र. 1	56	38	12	6	112
प्र. 2	40	56	9	7	112
प्र. 3	48	57	6	1	112

विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उक्त शब्द-प्रश्नों के उत्तरों का विवरण तालिका 6 में दिया गया है।

निष्कर्ष

इस शोध अध्ययन में निष्कर्ष के रूप में यह पाया गया है कि विद्यार्थियों के लिए ऋणात्मक संख्याओं (पूर्णांक) की परिकल्पना करना और उन्हें अवधारण करना सरल कार्य नहीं है, क्योंकि वे ऋण चिह्न को 'एक संकेत' और एक 'परिमाण' के रूप में भी निरूपित करते हैं। विद्यार्थियों को 'योज्य तत्समक' एवं 'गुणनात्मक तत्समक' की सटीक समझ है, लेकिन 'योज्य प्रतिलोम' एवं 'गुणनात्मक प्रतिलोम' जैसी अवधारणाओं की समझ नहीं है। इसका कारण यह हो सकता है कि विद्यार्थियों को संख्याओं को अवधारित करने में समस्या हो, जैसे— प्राकृतिक संख्याएँ, पूर्ण संख्याएँ, पूर्णांक संख्याएँ, अभाज्य संख्याएँ इत्यादि उनके मस्तिष्क में भ्रम उत्पन्न करती हो।

पूर्णांक अधिगम में सामान्य त्रुटियों की पहचान

शोधार्थियों द्वारा अवलोकन के आधार पर पाया गया कि विद्यार्थियों द्वारा पूर्णांक संख्याओं के

अधिगम के समय सामान्य त्रुटियों के संभावित कारण निम्न हो सकते हैं—

1. विद्यार्थी अंग्रेज़ी में आवश्यक गणितीय शब्दावली को समझने में अक्षम थे इसलिए उन्हें क्षेत्रीय भाषा या मातृभाषा जैसे हिंदी भाषी क्षेत्रों में हिंदी में उस शब्दावली के अर्थ को बताने की आवश्यकता हो सकती है।

   प्राकृतिक संख्याएँ Natural Numbers × (N)
   पूर्ण संख्याएँ Whole Numbers × (W)
   अभाज्य संख्याएँ Prime Numbers × (P)
   पूर्णांक Integer Numbers × (Z)

   यद्यपि, शोधार्थियों द्वारा परीक्षण का निर्माण करते समय भाषा का पूर्ण ध्यान रखा गया था, किंतु मानक गणितीय भाषा भी स्थानीय भाषा में विद्यार्थियों को कठिन प्रतीत हो सकती है।
2. विद्यार्थी ऋणात्मक संख्याओं के उपयोग को समझने में सक्षम नहीं थे, क्योंकि किसी स्थान पर इसका उपयोग 'परिमाण' को निरूपित करता है तो किसी स्थान पर इसका उपयोग 'संकेत' के रूप में किया जाता है।
3. कई मिथ्या-धारणाएँ विद्यार्थियों को गणितीय पृष्ठभूमि एवं व्यावहारिक पृष्ठभूमि में पूर्णांकों को समझने में कठिनाई उत्पन्न कर रही थीं।

   उदाहरण, गणितीय रूप से; −4, −5 या −6 से अधिक है, क्योंकि संख्या रेखा में बाईं ओर अवस्थित संख्या सदैव अपने से दाईं ओर की संख्या से बड़ी होती है, लेकिन व्यावहारिकता में; 4 रुपये का ऋण (Debt) 5 रुपये से कम होता है, तापमान −10 डिग्री सेल्सियस −4 डिग्री सेल्सियस से ज्यादा ठंडा है।
4. विद्यार्थियों को संख्याओं को संख्या रेखा के क्रम में समझने में दुविधा हो रही थी, जैसे छोटी संख्याएँ बड़ी संख्या के बाईं ओर रखी जाती हैं लेकिन क्यों?
5. यह भी संभावना हो सकती है कि शिक्षक ने गणितीय नियमों को विद्यार्थियों पर आरोपित किया हो तथा कुछ लघु उपाय दिए गए हों जिससे सीखने को यांत्रिक बना दिया गया है। यह शिक्षक के गणित विषय के शिक्षण में उचित समझ न होने के संकेत है।

यह सर्वविदित हैं कि प्रत्येक बच्चा सीखने की प्राकृतिक क्षमता के साथ पैदा होता है और उसमें सीखने की क्षमता अत्यधिक होती है। शिक्षक, विद्यालय संरचना की रीढ़ हैं और यदि शिक्षक अपने विषय एवं शिक्षण में सक्षम नहीं है तो विद्यार्थियों का बुनियादी आधार कमज़ोर हो सकता है तथा उसके निष्पादन करने की क्षमता कमज़ोर पड़ जाती है। इसलिए शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों को गणितीय समझ विकसित करने के हर संभव प्रयत्न करना चाहिए तथा आवश्यक कौशलों का प्रयोग करना चाहिए। साथ ही, गणित में पूर्णांकों का ज्ञान प्रमुख है तथा इसकी संक्रियाओं की सही समझ ही उच्च स्तरीय अधिगम की ओर अग्रसर करती है।

शैक्षिक निहितार्थ

यह शोध अध्ययन गणित शिक्षा में व्यावहारिक और सैद्धांतिक स्थायी चुनौतियों को हल करने में योगदान करेगा। पहला, व्यावहारिक चुनौती के समाधान हेतु कक्षा-आधारित शिक्षण में इस प्रकार से सुधार करना है कि शिक्षक पूर्णांक शिक्षण के व्यावहारिक निर्णयों को इंगित कर सकें।

दूसरा, भौतिक अनुभव गणित-अधिगम को समर्थित करता है या नहीं तथा यह कैसे सैद्धांतिक और व्यावहारिक चर्चा में नई अंतर्दृष्टि प्रदान कर सकता है।

इस शोध अध्ययन में सभी चार बुनियादी संक्रियाओं सहित पूर्णांक अधिगम के कई पहलुओं का गुणात्मक परीक्षण किया गया, इससे निष्कर्ष निकला कि शिक्षकों द्वारा विद्यार्थियों को गणित की संक्रियाएँ पढ़ाने से पूर्व पूर्णांकों पर अपनी समझ विकसित व सुस्पष्ट करनी चाहिए तथा उनसे संबंधित कुछ व्यावहारिक जीवन की परिस्थितियों से विद्यार्थियों को परिचित किया जाए, ताकि विद्यार्थी सरलता से पूर्णांकों को समझ सकें।

सुझाव

इस शोध अध्ययन में प्रस्तुत की गई त्रुटियों को कक्षा में शिक्षक द्वारा कुछ सुझावात्मक युक्तियों के माध्यम से दूर किया जा सकता है। इसलिए शिक्षक को कक्षा में उपस्थित प्रत्येक विद्यार्थी का संदर्भ ज्ञात हो तथा उनकी भाषा अथवा बोली आती हो। वह कक्षा में शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया के दौरान विभिन्न खेलों को अपने पाठ का हिस्सा बनाए, जैसे— कार्डों के माध्यम से पूर्णांकों का अधिगम, पूर्णांकों की तुलना करने के खेल, पूर्णांकों को पेपर पर रंगने के खेल, पूर्णांकों पर कक्षा में टास्क देना इत्यादि। इसके अतिरिक्त शिक्षक (यदि संभव हो तो) कक्षा में प्रौद्योगिकी का प्रयोग कर जिओ-जेबरा एवं फेट-कोलोराडो सिमुलेशन का प्रयोग कर पूर्णांकों को प्रभावी रूप से सिखा सकता है। साथ में, शिक्षण-अधिगम के दौरान शिक्षक सतत आकलन प्रविधि को अंगीकृत कर शैक्षिक उद्देश्यों को पूर्ण कर सकता है।

संदर्भ

द एडिटर ऑफ एनसाइक्लोपीडिया ब्रिटेनिका. 2009. एंटीजेर. डेफिनिशन, एक्जाम्पल्स एंड फैक्ट्स. 4 जून 2023 को https://www.britannica.com/science/integer से प्राप्त किया गया.

प्रथम एनुअल स्टेट्स ऑफ एजुकेशन रिपोर्ट (रूरल) 2019. 2020. 30 जून 2023 को https://img.asercentre.org/docs/ASER%202019/ASER2019%20report%20/aserreport2019earlyyearsfinal.pdf से प्राप्त किया गया.

मानव संसाधन विकास मंत्रालय. 2020. *नेशनल एजुकेशन पॉलिसी 2020*. रा.शै.अ.प्र.प., मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार, नई दिल्ली. 23 जून 2023 को https://www.education.gov.in/sites/upload_files/mhrd/files/NEP_Final_English_0.pdf से प्राप्त किया गया.

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्. 2005. *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005*. रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली. 23 जून 2023 को https://ncert.nic.in/pdf/nc-framework/nf2005-english.pdf से प्राप्त किया गया.

———. 2019. *राष्ट्रीय उपलब्धि सर्वेक्षण 2017*. रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली. 23 जून 2023 को https://ncert.nic.in/pdf/NAS/WithReleaseDate_NPPTL.pdf से प्राप्त किया गया.

———. 2023. *नेशनल करिकुलम फ्रेमवर्क फॉर स्कूल एजुकेशन 2023*. रा.शै.अ.प्र.प., नई दिल्ली. 5 अगस्त 2023 को https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf से प्राप्त किया गया.

शिक्षा मंत्रालय. 2021. *राष्ट्रीय उपलब्धि सर्वेक्षण 2021*. शिक्षा मत्रांलय, भारत सरकार, नई दिल्ली. 23 जून 2023 को https://nas.gov.in/download-national-report से प्राप्त किया गया.