8

बच्चे एवं गणित का सीखना-सिखाना

सत्यवीर सिंह*
अनिल कुमार*

गणित का अध्ययन न सिर्फ़ प्रारंभिक स्तर पर अनिवार्य होता है बल्कि उच्च-प्राथमिक स्तर पर भी इसकी उपयोगिता ज्यों-की-त्यों बनी रहती है। शिक्षा का अधिकार कानून के अनुसार भी गणित के अध्ययन को कक्षा 8 तक अनिवार्य बनाया गया है। एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा विकसित गणित का आधार पत्र कहता है कि गणित सीखने-सिखाने का लक्ष्य है दुनिया के बारे में गणित की भाषा में सोचना-सीखना और इस तरह की सोच विकसित करना जो कि ठेठ गणितीय हो। लेकिन गणित को किस प्रकार सिखाया जाए कि बच्चों को इसमें आनंद आए? इसी पर आधारित है यह लेख।

सभी बच्चे आठवीं कक्षा तक गणित पढ़ने वाले हैं, इस बात को ध्यान में रखा जाए तो स्कूली गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य गणितज्ञ पैदा करना नहीं हो सकता और केवल वैज्ञानिक या इंजीनियर पैदा करने में भी मददगार नहीं हो सकता, हालाँकि इन क्षेत्रों के संदर्भ में गणित का बहुत महत्वपूर्ण और खास स्थान है। फिर स्कूली गणितीय शिक्षा का उद्देश्य क्या है?

गणित का आधार पत्र कहता है कि गणित सीखने-सिखाने का लक्ष्य है दुनिया के बारे में गणित की भाषा में सोचना-सीखना और इस तरह की सोच विकसित करना जो कि ठेठ गणितीय हो। दूसरी तरफ पिछले पाँच दशकों से देश में चल रहे पाठ्यक्रमों और पाठ्यपुस्तकों को देखने पर कुछ अलग ही बात सामने आती है। ऐसा प्रतीत होता है कि 'विश्वविद्यालयीन शिक्षा' या शायद 'आईआईटी शिक्षा' का स्कूली गणित की विषयवस्तु और शैली पर प्रभुत्व रहा है। अत: कोई आश्चर्य नहीं कि अतीत में स्कूल गए और वर्तमान में स्कूल जा रहे अधिकांश विद्यार्थियों के मन में इस विषय के लिए कोई प्यार नहीं है।

बच्चों के लिए संसार का अनुभव एक मूर्त अनुभव होता है, लेकिन इस अनुभव की अपनी कई सीमाएँ होती हैं। बच्चों में तर्क शक्ति का विकास करना गणित का एक मुख्य कार्य है ताकि वे उस दुनिया की कल्पना भी कर सकें जिससे उनका सीधा जुड़ाव नहीं रहा है। अपने आरंभिक जीवन में बच्चे गणित के ज़रिए मूर्त

* *प्राचार्य*, एस. एन. आई. कॉलेज, पिलाना, बागपत
** *वरिष्ठ प्रवक्ता*, डायट, एस.सी.ई.आर.टी.,दिलशाद गार्डन, नयी दिल्ली

वस्तुओं को तो समझते ही हैं साथ ही वे ऐसी तर्क प्रक्रियाओं का भी विकास कर पाते हैं जिससे वे अमूर्त, अपरिचित और अज्ञात का आकलन कर पाएँ। आकलन की सटीकता की वजह से गणित का अध्ययन ज्ञान-विज्ञान के कई क्षेत्रों में एक आधार की तरह काम करता है। परिणामस्वरूप गणित का अध्ययन न सिर्फ प्रारंभिक स्तर पर अनिवार्य होता है बल्कि उच्च-प्राथमिक स्तर पर भी इसकी उपयोगिता ज्यों-की-त्यों बनी रहती है। शिक्षा का अधिकार कानून के अनुसार भी गणित के अध्ययन को कक्षा 8 तक अनिवार्य बनाया गया है।

बच्चों के विकास में, खासतौर से अपने आस-पास की दुनिया को समझने के लिए गणित की भूमिका काफी महत्वपूर्ण हो जाती है। गणितीय ज्ञान के ज़रिये बच्चे न सिर्फ़ अपने आस-पास घट रही घटनाओं को तार्किक रूप से समझ पाते हैं, बल्कि इसके ज़रिये दूरदृष्टि की क्षमता को विकसित करते हैं। गणित का ज्ञान बच्चों को इसका अवसर देता है कि वे अपने परिवेश को सापेक्षिक तौर पर समझ सकें। एक समय के बाद जब बच्चों का अनुभव जगत बढ़ता है तो उन्हें यह ज़रूरत महसूस होती है कि वे इन अनुभवों में एक समरूपता लाएँ। इसके लिए उन्हें विचार करने व सोचने की कुछ विशिष्ट पद्धतियों की ज़रूरत महसूस होती है। ताकि वे उस खाली जगह को भर सकें जिसका कि वे सीधा या प्रत्यक्ष अनुमान नहीं कर पाते हैं। ऐसी स्थिति में उन्हें 'अमूर्त' कल्पनाओं का सहारा लेना पड़ता है। गणित बच्चों को अमूर्त कल्पना करने के औज़ार प्रदान करता है। इसलिए प्रारंभिक स्तर पर गणित शिक्षण की अनिवार्यता है। गणित से औपचारिक रूप से परिचित होने के काफी पहले से ही बच्चे गणित तर्क प्रणाली का इस्तेमाल करना शुरू कर देते हैं। शिक्षाशास्त्रियों के बीच अभी भी यह रहस्य का विषय बना हुआ है कि बच्चे ठीक-ठीक कब गणितीय संकल्पनाओं का इस्तेमाल करना शुरू करते हैं। दो एवं चार वर्ष की उम्र के बीच के बच्चे 'छोटा-बड़ा' या 'पास-दूर' जैसी संख्यापूर्ण संकल्पनाओं का इस्तेमाल करना शुरू कर देते हैं। साथ ही इस स्तर पर वे मोटे तौर पर 'कम और ज़्यादा' जैसी अवधारणाओं से भी परिचित हो जाते हैं।

बच्चों के अनुभव में गणित सबसे पहले कब शामिल होता है, इसका ठीक-ठीक आकलन तो न तो शिक्षाशास्त्री कर पाते हैं और न ही मनोवैज्ञानिक। पर इतना तय है कि गणित का अनुभव जगत भाषा के अनुभव जगत के साथ शुरू होता है, इसकी औपचारिक जानकारी हमें बच्चों के अवलोकन से प्राप्त होती है। स्कूल में बच्चों का गणित से पहला परिचय अंकों के माध्यम से होता है। अंक उसे शब्द से अलग प्रतीत होते हैं और उसका अनुभव जगत अंकों को अलग तरीके से ग्रहण करता है। स्कूली गणित की किताबें बच्चों को खास-तौर से 'आकर्षित' करती हैं क्योंकि इन किताबों में उन्हें अन्य किताबों से अलग तरह के संकेत और भाषायी-व्यवस्था नज़र आती है। स्कूल में गणित को जिस 'तरीके' से बच्चों से परिचित करवाया जाता है वह देर-सबेर उनके लिए कुछ बुनियादी कठिनाइयाँ खड़ी करती हैं। परिणामस्वरूप गणित

के ज्ञान के चलते जो खूबियाँ उनके भीतर होनी चाहिए उनसे वे वंचित रह जाते हैं।

गणित का ज्ञान अपनी वैधता के लिए जिस तरह की तर्क प्रक्रिया से होकर गुज़रता है उसे किसी अन्य तर्क प्रक्रिया से चुनौती नहीं दी जा सकती। गणित के अध्ययन-अध्यापन के दौरान हम जिस स्तर की सटीकता को लेकर आगे बढ़ते हैं वैसी सटीकता किसी भी अन्य विषय में नहीं होती। इसलिए गणितीय तर्क प्रक्रियाएँ तो अन्य विषयों की वैधता का आधार बनती रहीं, लेकिन मानवीय ज्ञान-शाखाओं में ऐसी कोई अन्य ज्ञान-शाखा नहीं है जो गणितीय ज्ञान की सटीकता की कसौटी बने। इसलिए सटीकता के इस 'पैमाने' को हम बुनियादी मानक के रूप में स्वीकार करते रहे हैं। सटीकता की यह प्रकृति गणितीय संख्याओं, चरों इत्यादि में तो दिखती ही है साथ ही गणितीय संक्रियाओं मसलन गुणा, भाग, घटाव, जोड़ या फिर अनुपातिक संबंधों में भी ऐसी ही सटीकता देखने को मिलती है।

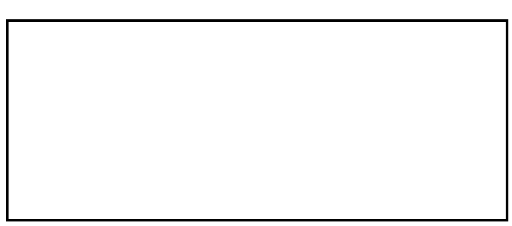
गणित पढ़ाने का तरीका क्या हो? बच्चे गणित की किताबों में जो कुछ पढ़ते हैं उन संकल्पनाओं और अवधारणाओं से उनका सामना ज़िंदगी में नहीं होता। '5' जिस संकल्पना को व्यक्त करता है उसे बच्चे ज़िंदगी में कहीं नहीं देखते। 'पाँच पेंसिल' और 'पाँच' ये दोनों ही दो चीज़ें हैं। बच्चे जिंदगी में पाँच कलम, पाँच खेत इत्यादि तो देखते हैं, लेकिन 'पाँच' उन्हें कहीं नहीं दिखता। इसलिए गणित पढ़ाते समय यथासंभव बच्चों की अमूर्तता के स्तर में विकास करते रहना चाहिए। यह ध्यान रखना होगा कि अमूर्तता के एक स्तर से दूसरे स्तर तक का फासला इतना कम हो कि बच्चे अपनी कोशिशों से उसे खुद पाट सकें। दो संकल्पनाओं की अमूर्तता के फासले को कम करने के लिए शिक्षक मूर्त उदाहरणों का सहारा लेता है। इस समझ को सामने रखें तो दो बातें स्पष्ट रूप में सामने आती हैं। पहली यह कि गणित अध्यापन से हम बच्चों को अमूर्त चिंतन सिखा रहे होते हैं और दूसरी यह कि अमूर्तता के स्तर को ध्यान में रखकर बच्चों को सिखायी जाने वाली संकल्पनाओं व अवधारणाओं को सही क्रम में तैयार किया जाना चाहिए। अमूर्त संकल्पनाओं को समझाने के लिए प्रारंभिक तौर पर मूर्त उदाहरणों का सहारा लिया जा सकता है पर गणितीय ज्ञान में विकास की कसौटी अमूर्त चिंतन ही है। मूर्त उदाहरणों के चयन में यथासंभव अलग-अलग तरह के उदाहरण रखें ताकि बच्चे गणितीय दृष्टिकोण से संक्रियाओं, संकल्पनाओं और अवधारणाओं के अमूर्तीकरण या सामान्यीकरण की ओर तेजी से बढ़ें और गणितीय गणनाओं में अभ्यस्त हो सकें। गणितीय गणनाओं में अभ्यस्त होने का अर्थ अवधारणाओं को समझने से है न कि सवाल हल करने से।

उदाहरण रूप में बच्चे 432 + 432 +432 + 432 + 432 को 5 से भाग देने में पहले 432 को 5 बार जोड़ते है फिर भाग करते हैं बजाए बार-बार जोड़ को गुणा के रूप में लिखकर भाग करने के। इससे स्पष्ट होता है कि बच्चे मशीन रूप में सवालों के हल तो जानते हैं, परंतु उनको अवधारणाएँ स्पष्ट नहीं है।

'गणित का सीखना और सिखाना' में संक्रियाओं को स्वचालित तरीके से करने व यंत्रवत् तरीके से करने में फर्क करते हुए शिक्षकों को प्रयास करना चाहिए कि बच्चे संक्रियाएँ

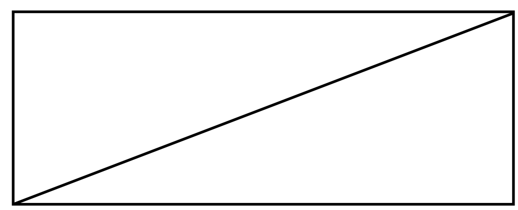
स्वचालित तरीके से करने लगें। उन्हें हर नियम लगाने से पहले ठहर कर सोचना पड़े। पर यह भी ध्यान रखना चाहिए कि वे संक्रियाओं को यंत्र-वत न करें। स्वचालित रूप से संक्रियाएँ करने में और यंत्रवत करने में फ़र्क यह है कि स्वचालित रूप से करने वाला व्यक्ति कभी भी अर्थ से कटता नहीं। वह जो काम कर रहा है, उसका मतलब बता सकता है जबकि यंत्रवत करने वाला चाहे सही कर सके, पर उसके अर्थ एवं कारणों की व्याख्या नहीं कर पाता।

बच्चों को अपने अर्थ गढ़ने का मौका दिया जाना चाहिए, ताकि वे सीखी गई अवधारणाओं का अनुप्रयोग कर सकें, अपने मतलब निकाल सकें। उदाहरण रूप में भिन्न सीखने और सिखाने की प्रक्रिया के दौरान चित्र बनाकर आधा बताने के बजाए यदि पूछा जाए कि किसी एक वस्तु के दो बराबर भाग कितने प्रकार से किए जा सकते हैं। इससे बच्चों में वस्तुनिष्ठता, तार्किक दृष्टिकोण, चितंन, वैज्ञानिक दृष्टिकोण जैसी योग्यताओं का सृजन किया जा सकता है। परिणामों, आकारों तथा आकृतियों का प्रयोग करके समस्याओं के समाधान खोजना गणित का एक अच्छा उपयोग है। उदाहरण के लिए चौथी कक्षा के बच्चों से पूछा जा सकता है कि इस चित्र को दो बराबर भागों में कितने तरह से बाँटा जा सकता है?

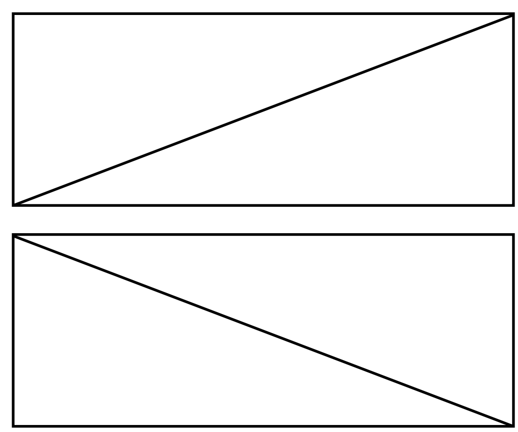


बच्चा यदि आधा की अवधारणा से परिचित है तो वह चित्र को दो बराबर भागों में बाँटने की युक्तियों को तलाश करेगा। इस तलाश करने की प्रक्रिया में वह तार्किक सोच, चिंतन तथा सटीकता का इस्तेमाल करेगा।

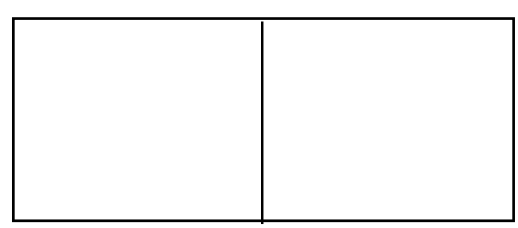
हो सकता है कि कोई बच्चा केवल एक तरीका ही बता पाए–

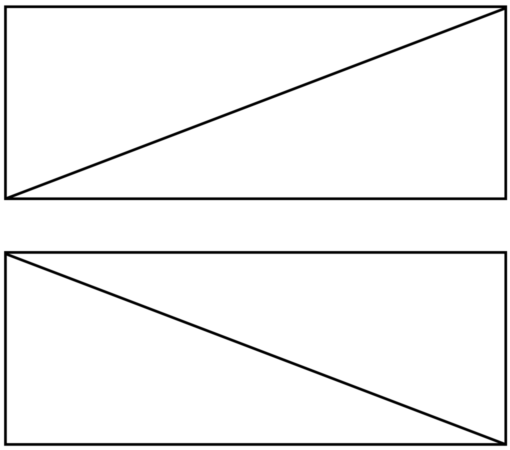


या हो सकता है कि कोई बच्चा दो तरीके बता दे, जैसे –

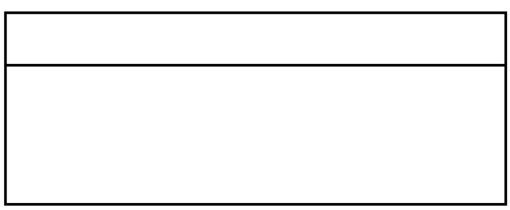


हो सकता है कि कोई बच्चा तीन तरीके बता दे, जैसे –

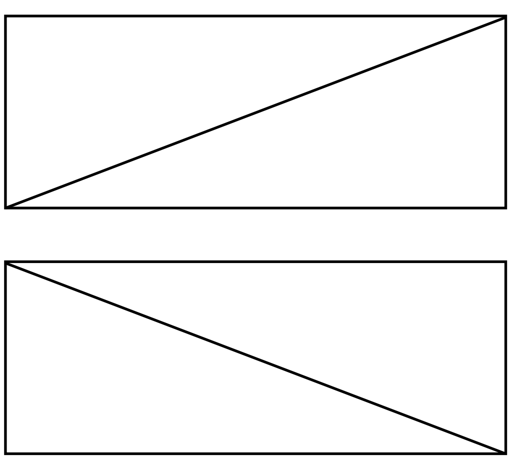


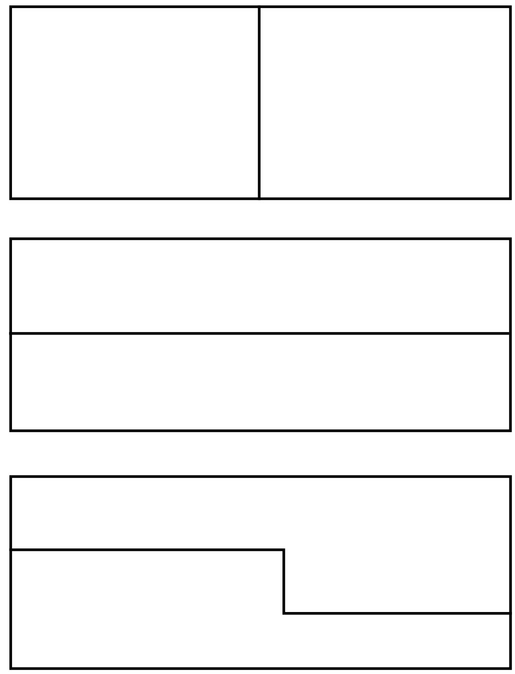


अवधारणा की समझ की अभाव में हो सकता है कि कोई बच्चा यह तरीके बता दे, जैसे –



हो सकता है कि कोई प्रतिभाशाली बच्चा कई तरीके बता दे, जैसे –





उपरोक्त क्रियाकलाप को कागज़ के आयताकार टुकड़े के साथ भी कराया जा सकता है। तब हम बच्चे के प्रभावकारी संप्रेषण का आकलन भी कर सकते हैं।

आइए गणितीय संप्रेषण को विकसित करने वाली एक समस्या पर विचार करें –

समस्या 3 + 4 = ? को शब्दों के माध्यम से प्रस्तुत करना।

- एक विद्यार्थी सोचकर कहता है कि मेरे पास 3 पेंसिलें हैं तथा रीना के पास 4 पेंसिलें हैं। तो हम दोनों के पास कुल कितनी पेंसिलें हैं ?
- दूसरा विद्यार्थी सोचकर कहता है कि मेरे पास 3 लाल गेंदें हैं तथा सुधा के पास

4 नीली गेंदें हैं। तो हम दोनों के पास कुल कितनी गेंदें हैं।

अब आपकी कक्षा में इन समस्याओं के विभिन्न तरीके मिल सकते हैं। इसी प्रकार अन्य समस्याओं को भी गणितीय संप्रेषण को विकसित करने वाली एक समस्या के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। गणित पढ़ाने के लिए हमें गणित के ही तरीके को इस्तेमाल करना होगा। गणित में किसी भी सवाल को हल करने के लिए हम दो मुख्य बातों को देखते हैं कि 'क्या कुछ दिया हुआ है' और 'क्या हासिल करना है'। दरअसल, यही चीज़ हमें गणित शिक्षण के समय भी ध्यान रखनी चाहिए। सबसे पहले यह देखने की ज़रूरत होती है कि बच्चे क्या जानते हैं और उसके बाद उन्हें हम क्या सिखाना चाहते हैं? इसी प्रक्रिया में बच्चे गणितीय ज्ञान की रचना करते हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2005 तथा गणित के आधार पत्र में गणितीय पाठ्यचर्या रूपरेखा हेतु स्पष्ट दिशा-निर्देश दिए गए हैं। हमें इन उद्देश्यों को ध्यान में रखते हुए शिक्षण-सामग्री तैयार करनी चाहिए। हमें सृजनात्मक तरीकों से गणनाएँ करना सिखाना होगा, ताकि इन कौशलों को निखारा जा सके और आगे बढ़ाया जा सके। चूँकि इनका इस्तेमाल रोज़मर्रा की व्यावहारिक परिस्थितियों में किया जाएगा अत: इन कौशलों का मूल्यांकन ऐसे परियोजना कार्यों, गतिविधियों और खेलों के द्वारा किया जाना चाहिए जो कि जीवन से जुड़ी परिस्थितियों के अनुरूप हों, बच्चों के स्थानीय परिवेश से जुड़े हों न कि तनावपूर्ण परीक्षाओं के द्वारा। चूँकि गणित अकसर अपने आस-पास के अनुभवों से ही और विकसित होता जाता है अत: अवधारणाओं को सृजनात्मकता के आलोक में फिर से देखा जाना चाहिए। पूरा पाठ्यक्रम इस दर्शन से भरा हुआ होना चाहिए कि गणित 'नियमित संरचनाओं की पहचान का विज्ञान' है। हमें इस बात का भी खास ख्याल रखना ज़रूरी है कि संरचना की पहचान का आकलन किस तरह होता है। ऐसे बहुत से बच्चे हैं जो पारंपरिक पाठ्यपुस्तकीय गणित में अच्छे प्रतीत नहीं होते पर उनकी परिवेश की समझ बहुत गहरी होती है और वे संरचनाओं को पहचानने में तथा पहेलियों को सुलझाने में काफी दक्ष होते हैं। बच्चों को अर्थपूर्ण सवालों को हल करने का पर्याप्त अनुभव होना चाहिए और एक अंतर्दृष्टि पाने के रोमाँच का अनुभव भी मिलना चाहिए। इन सब ज़रूरतों को पूरा करने वाली पहले से तैयार कोई भी सामग्री बाज़ार में उपलब्ध नहीं है। हम अलग से संसाधनों को निर्धारित करके इस तरह की सामग्री की रचना करें या कम से कम सुसंगत ढंग से संग्रहीत करें, और शिक्षकों को प्रशिक्षित करें ताकि वे उसका और बेहतर ढंग से इस्तेमाल कर सकें। कक्षा के स्तर पर यह बेहद ज़रूरी है कि शिक्षक वास्तविक परिस्थितियों में सीखने-सिखाने का वातावरण पैदा करे। कक्षा को ऐसी जगह बनाने के लिए शिक्षक और छात्रों के बीच विश्वास और प्रेम का संबंध होना चाहिए। शिक्षक को भी गणित शिक्षण करने में बहुत आनंद आना चाहिए तभी उसके छात्र प्रेरित महसूस करेंगे। इससे भी ज़्यादा ज़रूरी है कि उसे बच्चों की इस बात को समझने में मदद करना चाहिए कि उनके डर क्या हैं?

एक और अनिवार्य बात गणित शिक्षा के इस स्वरूप के लिए समझना ज़रूरी है कि बच्चों में अमूर्तता के स्तर में लगातार बदलाव होता है। बच्चे जैसे-जैसे बड़े होते हैं वैसे-वैसे ही उनमें अमूर्त रूप से सोचने का विकास होता है। 12 से 14 वर्ष की अवस्था एक ऐसी अवस्था होती है जब तक यह विकास पूरा हो जाता है। इसलिए गणित पढ़ाने की व्यवस्था ऐसी होनी चाहिए कि वह धीरे-धीरे अमूर्त संकल्पनाओं की ओर बढ़ें। यह ध्यान रखना ज़रूरी है कि गणित शिक्षण में मूर्त वस्तुओं का इस्तेमाल हम सिर्फ इसलिए कर रहे होते हैं, ताकि बच्चे अमूर्त संकल्पनाओं और अमूर्त चिंतन प्रक्रिया तक पहुँच सकें।

अंततः हमें यह ध्यान रखना होगा कि गणित की एक भाषा होती है जिसमें अंक, चर और ज्यामिती आकृतियाँ इत्यादि शामिल होते हैं। इसका एक व्याकरण होता है जिसमें जोड़, घटाव, गुणा, भाग इत्यादि शामिल होते हैं। बच्चे ज्यों-ज्यों गणित की भाषा और व्याकरण से परिचित होते जाएँगे, वैसे-वैसे उनके लिए गणित आसान होता जाएगा।

❑❑❑