खेल-खेल में गणित शिक्षण

प्रतीक चौरसिया*
सोमू सिंह**

गणित विषय को समझना एवं समझाना, दोनों ही एक संज्ञानात्मक क्रिया है। सामान्यतः गणित को एक जटिल विषय माना जाता है और गणित सीखने एवं सिखाने के तरीके भी अन्य विषयों से अलग होते हैं जिसकी वजह से विद्यार्थियों में भय एवं चिंता के साथ गणित में अरुचि भी होने लगती है। इस लेख में पहले गणित शिक्षण व खेलों में समानता एवं खेलों के माध्यम से ज्ञान और तर्क को विकसित करने के लिए सैद्धांतिक दृष्टिकोण प्रस्तुत किए गए हैं। तत्पश्चात् शिक्षण की कुछ रोचक गतिविधियाँ और खेल प्रस्तुत किए गए हैं। यह लेख गणित को खेल के सहयोग से कैसे पढ़ाएँ — इस पर आधारित बिंदुओं को चिह्नित करता है। खेल की गतिविधियों, उनकी भूमिका तथा प्रकृति को बेहतर ढंग से समझना एवं गणित के अध्यापन को उपयोग में लाना महत्वपूर्ण है। यह लेख उपर्युक्त बिंदुओं को ध्यान में रखते हुए गणित को खेल-खेल में कैसे सिखाएँ एवं गणित शिक्षण में खेलों का प्रयोग कैसे करें? इस पर आधारित है।

प्रस्तावना

सभी उम्र के लोग अपनी-अपनी रुचि के हिसाब से खेल खेलना पसंद करते हैं। खेल चाहे जिस भी प्रकार का हो, उसमें हम सभी अपनी बुद्धि का प्रयोग अवश्य ही करते हैं। खेल को एक ऐसे रूप में भी देखा जा सकता है, जिसमें हम सभी अपनी बुद्धि का इस्तेमाल सबसे बेहतर तरीके से करते हैं। जिसके कई कारण हैं, जैसे — संपूर्ण ध्यान केंद्रित होना, रुचि का होना, तत्पर होना, स्व-प्रेरित होना, नवीन चुनौतियों को सहज रूप से स्वीकारना एवं उनका समाधान निकालने की विधि को खोजना आदि।

खेल हमेशा व्यक्ति को कार्य करने हेतु प्रेरित करने का काम करता है और साथ-ही-साथ मौलिक अवधारणाओं जैसे कि, गिनती करना, संख्या का प्रयोग करना, एक-एक कर निश्चित नियमों पर चलना, संख्यात्मक तथा स्थानिक संरचनाओं का समन्वय करना और रणनीतियों का पता लगाने के अवसर प्रदान करता है। विद्यार्थियों को गणितीय खेलों में सार्थक रूप से शामिल करने, चुनौतियाँ देने से विद्यार्थियों को संख्या संयोजन, अनुमानों का उपयोग करने, पैटर्न और अन्य महत्वपूर्ण गणितीय संरचनाओ को समझने, चिंतनशील तर्क विकसित करने एवं अवधारणाओं को तलाशने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है। इसके अलावा, खेल विद्यार्थियों में गणितीय समझ और तर्क का विकास करने के लिए भी अवसर प्रदान करते हैं। शिक्षकों को

* *शोधार्थी*, शिक्षा संकाय, काशी हिंदू विश्वविद्यालय, वाराणसी, उत्तर प्रदेश – 221005
** *सहायक आचार्य*, शिक्षा संकाय, काशी हिंदू विश्वविद्यालय, वाराणसी, उत्तर प्रदेश – 221005

खेल खेलने के लिए विद्यार्थियों को अवसर प्रदान करना चाहिए तथा गणितीय विचारों को उभरने देना चाहिए, क्योंकि खेलों से विद्यार्थियों को नए पैटर्न, समीकरण और रणनीतियों की जानकारी मिलती है। प्रत्येक व्यक्ति खुद को स्वस्थ रखने या मनोरंजन करने के लिए कोई-न-कोई खेल अवश्य ही खेलता है। खेल व्यक्ति के जीवन में एक ऊर्जा के स्रोत की तरह काम करता है, जिससे वह अपनी मानसिक एवं शारीरिक अवस्था को ऊर्जावान रखता है। खेलों का विद्यार्थी जीवन में बहुत ही अधिक योगदान होता है एवं प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने में खेल महत्वपूर्ण योगदान दे सकते हैं। खेल विद्यार्थियों में कई तरह के गुणों का विकास करते हैं, जैसे—

- विभिन्न खेलों के माध्यम से विद्यार्थियों में तर्क का विकास होता है।
- विभिन्न खेलों के माध्यम से विद्यार्थियों में सहयोग की भावना, व्यक्ति का सम्मान करना, नेतृत्व क्षमता, संप्रेषण-कौशल जैसे मूल्यों का विकास होता है।
- खेल हमेशा रणनीतिक गणितीय तर्क (Strategic Mathematical Reasoning) को प्रोत्साहित करते हैं, क्योंकि खेलों के माध्यम से विद्यार्थियों में समस्याओं को सुलझाने और संख्याओं के प्रति उनकी समझ को बढ़ाने के लिए विभिन्न रणनीतियाँ मिलती हैं।
- खेल गणना से नियम बनाने एवं गणना का प्रवाह (Fluency of Counting) विकसित करने में विद्यार्थियों की सहायता करते हैं।
- खेल के दौरान शिक्षक विद्यार्थियों का निरीक्षण कर सकते हैं तथा उनकी क्षमताओं व कौशलों का आकलन कर सकते हैं। साथ ही उन्हें विभिन्न खेलों के माध्यम से गणित सिखाने में सहायता मिलती है।
- खेल अभ्यास के लिए विभिन्न अवसर प्रदान करते हैं तथा विद्यार्थियों के मध्य छोटे-छोटे समूहों में एक साथ कार्य करने के कौशल का विकास करते हैं।
- खेलों में विद्यार्थियों को संख्या प्रणाली के साथ नियमों का पालन करने एवं तार्किक गतिविधियों से परिचित होने का अवसर मिलता है।
- विभिन्न प्रकार के खेलों से विद्यार्थियों में चिंतनशील तर्क की गहरी समझ विकसित होती है।
- खेलों को विद्यालय एवं गृह कार्यों से भी जोड़ दिया जाए तो विद्यार्थियों का शारीरिक, तार्किक एवं बौद्धिक विकास करने में सहायता मिल सकती है। साथ ही, माता-पिता भी घर पर अपने बच्चों के साथ खेल खेलकर उनकी गणितीय समझ का विकास कर सकते हैं।

गणित एवं खेलों की प्रकृति

गणित पैटर्न और संबंधों का विज्ञान है, जो तर्क और रचनात्मकता, दोनों पर निर्भर करता है। एक सैद्धांतिक अनुशासन के रूप में, गणित बिना किसी चिंता के 'संबंधों के संबंधों' (Relationships of Relationships) की खोज करता है। गणित का सार इसकी तार्किक सुंदरता और इसकी बौद्धिक चुनौती में निहित है। गणित एक व्यावहारिक विज्ञान भी है; गणित पैटर्न और संबंधों के लिए खोज करता

है। गणितीय सोच अकसर अमूर्त प्रक्रिया के साथ शुरू होती है अर्थात् दो या दो से अधिक वस्तुओं या घटनाओं के बीच सहसंबंध बनाते हुए आगे बढ़ती है।

गणितीय खेल खेलते समय खेल की सबसे मूलभूत अवधारणाओं का पता लगाया जाता है। विद्यार्थियों को खेल को खेलना एवं एक-दूसरे को प्रेरित करना मनोरंजक लगता है। हालाँकि यह इस बात पर निर्भर करता है कि खेल किस प्रकार के हैं और कितने अच्छे तरीके से इनका संचालन हो रहा है।

यदि खेल शुरू करते हैं तो यह अच्छी 'रणनीतियों के प्रतिमान' (Models of Strategies) एवं किसी भी धारणा को प्रकट करने तथा संज्ञानात्मक रणनीति बनाने के अवसर प्रदान करते हैं। जब विद्यार्थी खेल गतिविधि में लगे हुए होते हैं तो उन्हें समझने और समझाने में मानसिक योग्यता और कौशलों का उपयोग होता है। खेल विद्यार्थी समूहों के साथ अच्छे संबंधों को विकसित करने और निरंतर सीखने के लिए प्रेरित करता है।

मानसिक एकाग्रता और खेल

गणित के खेल खेलना, विद्यार्थियों में रणनीतिक सोच, समस्या को हल करने एवं प्रवाह को विकसित करने के लिए प्रोत्साहन देता है। यह बिना विफलता एवं भय के विद्यार्थियों को एक अलग संदर्भ में सीखने और उनके समकक्षों के साथ गणित की व्याख्या और चर्चा करने का अवसर प्रदान करता है। एक अच्छा खेल विद्यार्थियों में संज्ञानात्मक और भावनात्मक स्तरों पर विकास के कई अवसर प्रदान करता है। अर्थात् चुनौती को खेल के साथ शामिल किया जाना चाहिए। विद्यार्थियों को नए अवसर मिलेंगे और सीखने में कोई भी समस्या नहीं होगी। जैसा कि गणितीय खेल, गणितीय कौशल, पैटर्न और संबंध का विश्लेषण करने में सहायता करते हैं, इन्हें विद्यार्थी की उम्र का ध्यान रखते हुए उचित तरीके से उपयोग करना चाहिए। कई गणित के खेल हैं जो मूल रूप से अभ्यास (Drills) पर आधारित हैं तथा तथ्यों के साथ विचारों के प्रवाह को बनाए रखने में सहायक हैं। साथ ही कुछ ऐसे गैर-गणितीय खेल हैं, जिनके निरंतर अभ्यास से गणितीय कौशलों, समस्या समाधान, तार्किक समझ आदि का विकास होता है।

खेल चाहे जो भी हो, उसमें मानसिक एकाग्रता का बहुत ही योगदान होता है। मानसिक एकाग्रता का स्तर प्रत्येक व्यक्ति तथा प्रत्येक खेल में अलग-अलग तरह से उपयोग में आता है। किसी भी खेल में जब कोई व्यक्ति खेलने को तैयार हो तो वह पूरी तत्परता एवं एकाग्रता के साथ अपनी सहभागिता देता है, जैसे—शतरंज ऐसा खेल है, जिसमें उच्च स्तर की बौद्धिक योग्यता की आवश्यकता होती है। इस खेल को विशेष तौर पर अधिक बुद्धि-लब्धि एवं एकाग्रता वाले व्यक्तियों के लिए माना जाता है। इस खेल में केवल घोड़े, हाथी या राजा, रानी ही नहीं होते, बल्कि चरण-दर-चरण चिंतन एवं अत्यधिक तर्क का प्रयोग भी होता है।

खेल एवं गणित

खेल एवं गणित में एक समानता विशेष रूप से पाई जाती है। वह है, दोनों ही तत्परता के नियम पर आधारित हैं। जब तक कोई विद्यार्थी सीखने

के लिए या खेलने के लिए तत्पर न हो; कोई भी शिक्षक उसको पूरी तरह से सीखा नहीं सकता। गणित सीखने एवं खेल खेलने की प्रक्रियाओं में क्रमबद्धता का रूप देखने को मिलता है। जिसके आधार पर हम यह कह सकते हैं कि अगर विद्यार्थियों को खेल-खेल में गणित सिखाया जाए या गणित को खेल की तरह सिखाया जाए तो बच्चे गणितीय भय से दूर हो सकेंगे एवं उनका गणितीकरण पूर्ण रूप से हो सकेगा।

गणित सबसे जटिल विषय के रूप में माना जाता है, क्योंकि इसकी अभ्यास की प्रवृत्ति तार्किक है, जो कि अन्य-विषयों से अलग है। इसमें प्रत्येक चरण एक-दूसरे चरण पर आधारित होकर ही विकसित होता है। अनेक मनोवैज्ञानिकों, शिक्षाशास्त्रियों एवं दर्शनशास्त्रियों, जैसे— जीन पियाज़े, वाइगोत्सकी, ब्रूनर आदि ने इस बात पर हमेशा बल दिया है कि विद्यार्थियों को हमेशा उस तरह से सिखाएँ जिस तरह से वे सीख सकते हैं। उनकी मानसिक योग्यता, उनके पूर्व-अनुभव, उनको सीखने के लिए तत्पर बनाना एवं उनके सीखने के तरीकों का अध्ययन करना एक शिक्षक के लिए बेहद आवश्यक है। सामान्यतः सभी बच्चे अपनी-अपनी योग्यता एवं शारीरिक क्षमता के अनुसार खेल में रुचि लेते हैं। इसलिए अगर एक शिक्षक यह प्रयास करे कि खेल की विधियों से या विद्यार्थियों को खेल के निकट ले जाकर गणित-शिक्षण किया जाए एवं गणित-शिक्षण में अर्थपूर्ण शिक्षा को जोड़ा जाए तो उसकी जटिलता कुछ हद तक सरल हो सकती है। क्योंकि जब तक सिखाया हुआ ज्ञान बच्चे अपने व्यवहार में उतार नहीं लेते, शिक्षक का कार्य पूरा नहीं हो सकता। एक शिक्षक की भूमिका मात्र ज्ञान व सूचनाओं को प्रदान करना नहीं है, अपितु उसके कार्यों में भी परिवर्तन लाना है। *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा—2005* के अनुसार, "शिक्षक की भूमिका विद्यार्थियों को सीखने के क्रम में एक सुगमकर्ता (facilitator/ सुविधा प्रदान करने वाला) की तरह सहयोग देना है।"

उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् एवं राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की गणित पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन

चौरसिया और गोस्वामी (2015) ने अपने शोध पत्र, जो की बेसिक शिक्षा परिषद्, उत्तर प्रदेश के कक्षा 6 के गणित पाठ्यपुस्तक के विश्लेषण पर आधारित थी, में पाठ्यपुस्तक का कई पहलुओं के आधार पर विश्लेषण किया। ये पहलू थे — (1) गतिविधियाँ और भागीदारी; (2) समूह चर्चा; (3) आँकड़े और आरेखन संबंधी प्रतिनिधित्व; (4) दैनिक जीवन के लिए व्यावहारिकता और प्रासंगिकता; (5) कोशिश करें/स्वयं की जाँच करें; (6) उदाहरण और चित्र; (7) चिंतनशील सोच और तर्क; (8) विषय-वस्तु का तार्किक अनुक्रमण; (9) अभ्यास; और (10) निष्कर्ष।

इन सभी पहलुओं के आधार पर विश्लेषण किया गया एवं प्रमुख निष्कर्ष के रूप में यह पाया गया कि उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तक में अध्यायों के अंदर सामग्री का तार्किक अनुक्रमण उपयुक्त है, जो कि गणित की प्रकृति के साथ मेल खाता है और पाठ्यपुस्तक इन पहलुओं के साथ न्याय करती है। उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तक में "क्रियाकलाप और भागीदारी"

का कुल प्रतिशत 2.15 है, जहाँ राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् (एन.सी.ई.आर.टी.) की पाठ्यपुस्तक में इस गतिविधि का प्रतिशत 4.36 प्रतिशत है, जो उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की किताब से 2.21 प्रतिशत अधिक है। उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् पाठ्यपुस्तक में "अभ्यास में कुल प्रश्न" का कुल प्रतिशत 31.14 है, वहीं दूसरी ओर एन.सी.ई.आर.टी. की पाठ्यपुस्तक में इस गतिविधि का प्रतिशत 24.92 है। यह उत्तर प्रदेश बोर्ड की पाठ्यपुस्तक से 6.22 प्रतिशत कम है। उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् पाठ्यपुस्तक में "समूह चर्चाओं" का कुल प्रतिशत 0.75 है, वहाँ एन.सी.ई.आर.टी. पाठ्यपुस्तक में इस गतिविधि का प्रतिशत 2.35 है। ये उत्तर प्रदेश बोर्ड की किताब से 1.60 प्रतिशत अधिक है।

इसी आधार पर उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तकों एवं एन.सी.ई.आर.टी. की पाठ्यपुस्तकों का अध्ययन एवं अवलोकन करने पर ये भी पाया गया कि दोनों पाठ्यपुस्तकों को आकर्षक रूप से प्रस्तुत किया गया है तथा ये विद्यार्थी-केंद्रित हैं। पाठ्यपुस्तक एक ऐसी शृंखला का हिस्सा है जो सतत एवं विकासशील ज्ञान का आधार रखती है। गणित की पाठ्यपुस्तकों के आवरण, नाम और क्रम संख्या सभी स्पष्ट रूप से मुद्रित एवं रंगीन हैं, परंतु उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में आरेख, रेखाचित्र तथा चित्रों को अत्यधिक साफ़ मुद्रित करने की ज़रूरत है। दोनों पाठ्यपुस्तकों में विषय-वस्तु को पारंपरिक तरीके से न प्रस्तुत करके रचनात्मकता के साथ प्रस्तुतीकरण किया गया है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में विभिन्न अध्यायों को प्रकरण के आधार पर अलग-अलग भागों में विभाजित किया गया है। इसमें एक संक्षिप्त समीक्षा है और विषय का प्रस्तुतीकरण विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से किया गया है। तत्पश्चात् प्रश्नों को हल और अभ्यास के साथ प्रस्तुत किया गया है। यह उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तक में सामान्य रूप से मौजूद नहीं है। हालाँकि, गणित की प्रकृति को ध्यान में रखते हुए, यह समझा जाना चाहिए कि एक पाठ्यपुस्तक सब कुछ प्रदान नहीं कर सकती। गणित पाठ्यपुस्तकों की भी अपनी सीमा है तथा कक्षा में पाठ्यपुस्तक-सामग्री के साथ-साथ खेलों एवं गतिविधियों का उचित तरीके से समावेशन किया जाना चाहिए।

पाठ्यपुस्तकों में खेल-विधि के सहयोग से पढ़ाने पर भी विशेष बल दिया जाना चाहिए, जो कि उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में कुछ कम पाया जाता है। वहीं दूसरी तरफ़ राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में तर्क एवं खेलों का उचित समावेश देखने को मिलता है। राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में इस पर विशेष ध्यान दिया गया है कि विद्यार्थियों को खेल-विधि से कैसे सिखाया जाए? जैसा कि हम सब जानते हैं कि राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकें मानक पुस्तकें होती हैं। इन पाठ्यपुस्तकों में खेल विधि से पढ़ाने एवं विद्यार्थियों में गणित के प्रति रुचि पैदा करने के कई तरीके दिए गए हैं।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा—2005 में भी प्रमुखता से कहा गया है कि विद्यार्थियों को उनके स्तर के आधार पर गणित सिखाना एवं उनके विचारों में गणित को शामिल करना ज़रूरी है, जिससे उनका गणितीकरण संभव हो सके।

"गणितीकरण के लिए विद्यार्थियों की क्षमताओं का विकास करना ही गणित शिक्षा का मुख्य लक्ष्य है"

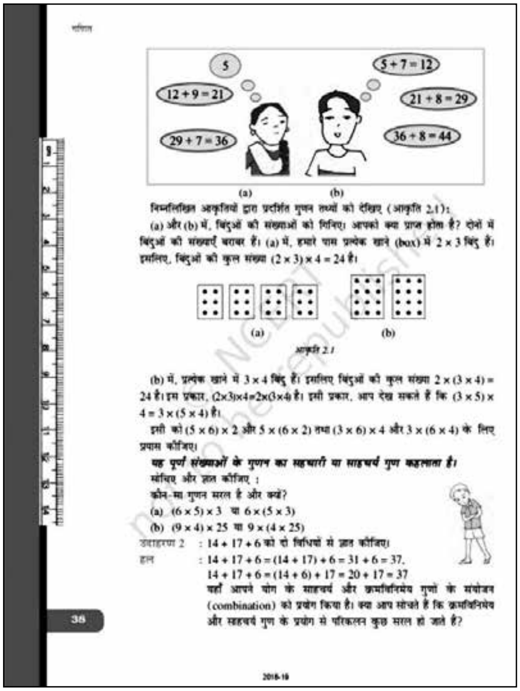
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की गणित पाठ्यपुस्तकों में निहित कुछ प्रमुख खेल एवं गतिविधियाँ

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकें हमारे राष्ट्र में मानक पाठ्यपुस्तकें हैं और ये पुस्तकें *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा—2005*, "शिक्षा बिना बोझ के" (learning without burden,1993) समिति की अनुशंसाओं एवं बाल-केंद्रित शिक्षाशास्त्र पर आधारित हैं।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन करने के पश्चात् यह पाया गया कि एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा 6, 7 एवं 8 की पाठ्यपुस्तकों में विशेषतः बीजगणित एवं मेंसुरेशन पर आधारित क्रिया एवं गतिविधियाँ पाई जाती हैं।

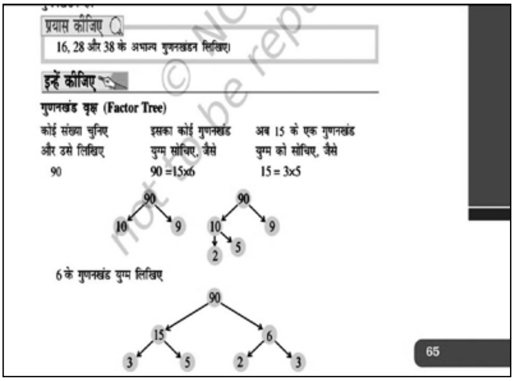
मुख्य रूप से विद्यार्थी जब कक्षा 5 से कक्षा 6 में अपने अंकगणित ज्ञान को सीख कर आता है, वहाँ उसे बीजगणित एवं व्यंजक जैसी अमूर्त चीज़ों से सामना करना पड़ता है। उस परिस्थिति में एन.सी.ई.आर.टी. की पाठ्यपुस्तकों में विशेष रूप से बीजगणित एवं तर्क का उपयोग किया गया है, जिसकी सहायता से विद्यार्थियों को बीजगणित एवं उसके मूलभूत प्रत्यय को समझाने में विशेष मदद मिलती है।



चित्र 1

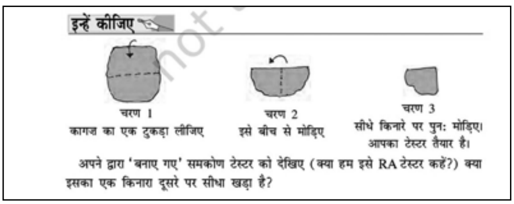
इसी प्रकार एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा 6, 7 एवं 8 की पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन करने के पश्चात् पाया गया कि इन पाठ्यपुस्तकों में विभिन्न प्रकार के खेलों पर आधारित गतिविधियों को समझाया गया है। एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा 6 की गणित पाठ्यपुस्तक में पृष्ठ संख्या 36 पर *प्ले द गेम* नाम के सेक्शन से विद्यार्थियों में संख्याओं का गुणा एवं विभिन्न प्रकार के डॉट्स की सहायता से गुणा को समझाने का प्रयास किया गया है (चित्र 1)। एन.सी.ई.आर.टी. की पाठ्यपुस्तकों में भी विभिन्न प्रकार के ज्यामितीय खेल, संख्यात्मक खेल एवं अन्य गतिविधियों का

उपयोग कर विद्यार्थियों को गणित की अमूर्तता को समझाने का बेहतर ढंग से प्रयास किया गया है।



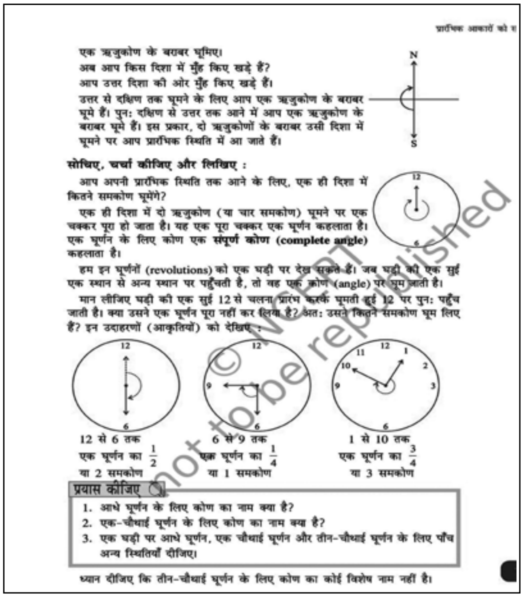
चित्र 2

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की कक्षा 6 की पुस्तक के पृष्ठ संख्या 36 पर दिए गए गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree) में विद्यार्थियों को गुणा करना सिखाया गया है (चित्र 2)। इस तरह के खेलों का प्रयोग शिक्षक अपनी कक्षा में कर सकते हैं तथा प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थियों को जोड़, घटाव, गुणा सिखाने में मदद कर सकते हैं।



चित्र 3

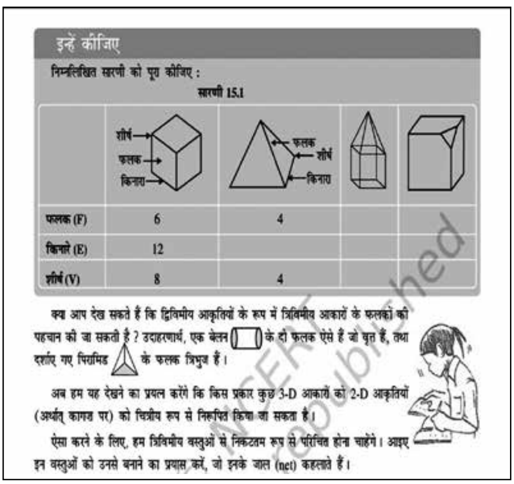
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में इन सभी खेलों के अलावा कागज़ से की गई क्रियाओं पर भी विशेष बल दिया गया है, जिसे हम ओरीगेमी मेथड के नाम से भी जानते हैं (चित्र 3)। बहुत सारी गतिविधियाँ तो इस प्रकार से दी गई हैं, जिनमें आकृतियों को समझाना एवं पेपर को अलग-अलग आकार में बनाना सिखाया गया है। चित्र 3 में एक पेपर को तीन भाग में मोड़कर कोण के विषय में विद्यार्थियों को समझाया गया है।



चित्र 4

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में घड़ी पर आधारित खेल भी शामिल किए गए हैं। जैसा कि विद्यार्थी अपने दैनिक जीवन में घड़ी की सहायता से समय प्रतिदिन देखते हैं। ऐसी क्रियाएँ विद्यार्थी-केंद्रित होती हैं, जिनका उपयोग करके विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के गणितीय कौशलों को सिखाया जा सकता है। उदाहरण के तौर पर एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा 6 की गणित पाठ्यपुस्तक की पृष्ठ संख्या 99 पर घड़ी की सहायता से कोण एवं विभिन्न प्रकार के कोण के बारे में विद्यार्थियों को परिचित कराने का उचित तरीका प्रस्तुत किया गया है (चित्र 4)।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की कक्षा 7 की पाठ्यपुस्तक में भी विभिन्न प्रकार के खेलों का उचित एवं समुचित ढंग से वर्णन है, जिनके आधार पर विद्यार्थियों में तर्क एवं गणित के कौशलों का विकास करना बेहद सरल और सहज मालूम पड़ता है। एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा 7 की गणित की पाठ्यपुस्तक में पृष्ठ संख्या 295 एवं 307 पर घन एवं पिरामिड जैसे जटिल चित्रों के सभी भागों का वर्णन एक टेबल के रूप में किया गया है, उस तरह की गतिविधियाँ विद्यार्थियों से प्रश्न-उत्तर करने, उन्हें सोचने एवं विचार करने का समुचित अवसर प्रदान करते हैं। पृष्ठ संख्या 281 पर रेखा आकृति के आधार पर ज्यामितीय चित्र बनाने के सही तरीके का वर्णन है, जिसका उपयोग शिक्षक अपनी कक्षा में अन्य रेखागणित की आकृतियों को बनाने एवं समझाने के उपयोग में कर सकते हैं। एक शिक्षक की सबसे बड़ी भूमिका है कि वह उन आकृतियों को चिह्नित करे एवं कक्षा में अपने विद्यार्थियों



इन्हें कीजिए

निम्नलिखित सारणी को पूरा कीजिए :

सारणी 15.1

	शीर्ष, फलक, किनारा (घन)	फलक, शीर्ष, किनारा (पिरामिड)		
फलक (F)	6	4		
किनारे (E)	12			
शीर्ष (V)	8	4		

क्या आप देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप में त्रिविमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है ? उदाहरणार्थ, एक बेलन के दो फलक ऐसे हैं जो वृत्त हैं, तथा दर्शाए गए पिरामिड के फलक त्रिभुज हैं।

अब हम यह देखने का प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3-D आकारों को 2-D आकृतियों (अर्थात् कागज़ पर) को चित्रीय रूप से निरूपित किया जा सकता है।

ऐसा करने के लिए, हम त्रिविमीय वस्तुओं से निकटतम रूप से परिचित होना चाहेंगे। आइए इन वस्तुओं को उनसे बनाने का प्रयास करें, जो इनके जाल (net) कहलाते हैं।

चित्र 5

के सामने प्रस्तुत करे। पृष्ठ संख्या 299 एवं 300 में घनाभ बनाने जैसे चित्रों को *डॉट एंड बॉक्स* जैसे खेल से जोड़कर बनाना सिखाया गया है। इस तरह के खेलों को, जैसा कि बताया जा चुका है, विद्यार्थियों में संज्ञानात्मक विकास एवं तर्कशक्ति का विकास करने के लिए सबसे उपयुक्त माना गया है।

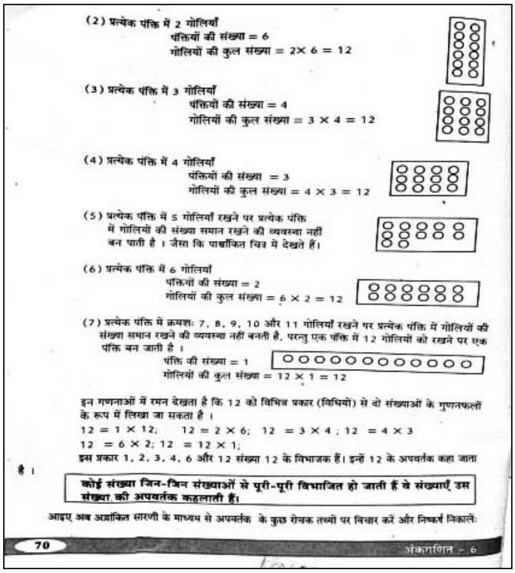
राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् की पाठ्यपुस्तकों में इनके अलावा कुछ अन्य प्रकार के नवीन खेलों का भी वर्णन है, जैसे— छाया खेल। इस खेल के उपयोग से हम विद्यार्थियों को क्रीड़ास्थल या कक्षा में धूप एवं आकृति का उपयोग कर विद्यार्थियों को बदलते हुए कोण, आकृति की विशेषताएँ एवं विभिन्न आकृतियों से बनने वाले प्रतिबिंबों से विभिन्न प्रकार की आकृतियों के विभिन्न आयाम प्रदर्शित कर सकते हैं। अतः इन पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन करने के पश्चात् यह पाया गया कि पाठ्यपुस्तकों की अपनी एक सीमा होती है। परंतु एक शिक्षक अपनी कक्षा में शिक्षण के लिए आत्मनिर्भर होता है और विभिन्न प्रकार की शिक्षण विधियों का समायोजन कर अपने शिक्षण को सफल बनाने के लिए स्वतंत्र होता है।

इस प्रकार हम यह कह सकते हैं कि एक शिक्षक अगर अपनी कक्षा में गणित पढ़ाते समय विभिन्न खेलों का उपयोग उचित तरीके से एवं विद्यार्थियों की व्यक्तिगत विभिन्नताओं को ध्यान में रखते हुए कराए तो वह अपने गणित शिक्षण को रुचिकर बनाने में सफल हो सकता है। अतः विद्यार्थियों के समक्ष गणित को केवल एक ज्ञान के रूप में न प्रस्तुत करते हुए, शिक्षक को प्रयास करना चाहिए कि वह विभिन्न प्रकार के खेलों का समायोजन करते हुए गणित

शिक्षण को खेल-खेल में पूरा करने का प्रयास करे। जिसके लिए विभिन्न प्रकार के मॉड्यूल, विभिन्न प्रकार के *फ़्री एंड ओपन सॉफ़्टवेयर* एवं अन्य प्रकार की शिक्षण सामग्री उपलब्ध हैं, जिनका उपयोग कर शिक्षक अपनी शिक्षण विधि को प्रभावशाली बना सकते हैं।

उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की गणित पाठ्यपुस्तकों में निहित कुछ प्रमुख खेल गतिविधियाँ

बेसिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश की पाठ्यपुस्तकों में निहित खेल एवं तार्किक गतिविधियाँ भी इस बात पर विशेष बल देती हैं कि खेल के माध्यम से भी गणित को रुचिकर विधि द्वारा विद्यार्थियों को सिखाया जा सकता है। बेसिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश बोर्ड की तीन कक्षाओं की पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन किया गया, जिसमें कक्षा 6 *आओ सीखें अंकगणित*, कक्षा 6 *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित*, कक्षा 7 *आओ सीखें अंकगणित*, कक्षा 7 *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित*, कक्षा 8 *आओ सीखें अंकगणित* एवं कक्षा 8 *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित* की पुस्तकें शामिल हैं। अवलोकन करने पर यह स्पष्ट रूप से पाया गया कि उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद् की गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तकों के निर्माण में *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा—2005* की प्रमुख भूमिका रही है एवं इनका निर्माण इसी के परिप्रेक्ष्य में किया गया है। पाठ्यपुस्तकों की विभिन्न क्रियाओं में तर्क, गणना करना एवं अमूर्त प्रत्यय को समझाने का प्रयास खेलों एवं खेल गतिविधियों के द्वारा किया गया है।



(2) प्रत्येक पंक्ति में 2 गोलियाँ
पंक्तियों की संख्या = 6
गोलियों की कुल संख्या = 2× 6 = 12

(3) प्रत्येक पंक्ति में 3 गोलियाँ
पंक्तियों की संख्या = 4
गोलियों की कुल संख्या = 3 × 4 = 12

(4) प्रत्येक पंक्ति में 4 गोलियाँ
पंक्तियों की संख्या = 3
गोलियों की कुल संख्या = 4 × 3 = 12

(5) प्रत्येक पंक्ति में 5 गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बन पाती है। जैसा कि पार्श्वांकित चित्र मे देखते हैं।

(6) प्रत्येक पंक्ति में 6 गोलियाँ
पंक्तियों की संख्या = 2
गोलियों की कुल संख्या = 6 × 2 = 12

(7) प्रत्येक पंक्ति में क्रमशः 7, 8, 9, 10 और 11 गोलियाँ रखने पर प्रत्येक पंक्ति में गोलियों की संख्या समान रखने की व्यवस्था नहीं बनती है, परन्तु एक पंक्ति में 12 गोलियों को रखने पर एक पंक्ति बन जाती है।
पंक्ति की संख्या = 1
गोलियों की कुल संख्या = 12 × 1 = 12

इन गणनाओं में रमन देखता है कि 12 को विभिन्न प्रकार (विधियों) से दो संख्याओं के गुणनफलों के रूप में लिखा जा सकता है।
12 = 1 × 12; 12 = 2 × 6; 12 = 3 × 4 ; 12 = 4 × 3
12 = 6 × 2; 12 = 12 × 1;
इस प्रकार 1, 2, 3, 4, 6 और 12 संख्या 12 के विभाजक हैं। इन्हें 12 के अपवर्तक कहा जाता है।

कोई संख्या जिन-जिन संख्याओं से पूरी-पूरी विभाजित हो जाती हैं वे संख्याएँ उस संख्या की अपवर्तक कहलाती हैं।

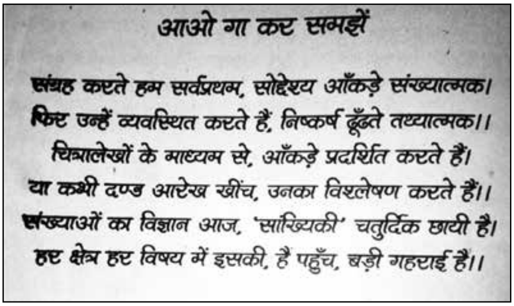
आइए अब अग्रांकित सारणी के माध्यम से अपवर्तक के कुछ रोचक तथ्यों पर विचार करें और निष्कर्ष निकालें:

70 अंकगणित - 6

चित्र 6

कक्षा 6 की *आओ सीखें अंकगणित* पाठ्यपुस्तक की इकाई 4 'अपवर्तक तथा अपवर्त्य' में गोलियों/मार्बल (Marble) की सहायता से एक क्रिया में विद्यार्थियों को अपवर्तक प्रत्यय के विषय में समझाने का प्रयास किया गया है। जिसमें 12 गोलियों के इस्तेमाल से उन्हें पंक्तियों में इस प्रकार व्यवस्थित करने को कहा गया है कि प्रत्येक पंक्तियों में गोलियों की संख्या समान हो (चित्र 6)। इस तरह की खेल गतिविधियों से विद्यार्थियों में बढ़ते हुए पैटर्न के माध्यम से तर्क एवं संख्याओं के प्रति समझ विकसित करने में सहायता मिलती है। इसी प्रकार पृष्ठ संख्या 75 पर गुणनखंड वृक्ष (Factor Tree) की मदद से विद्यार्थियों को गुणनखंड के प्रकार एवं गुणनखंड युग्म में लिखने के तरीके को बताया गया है। इसका प्रयोग कर शिक्षक अपनी कक्षा में विद्यार्थियों में संख्या एवं उसके अभाज्य

गुणनखंड लिखने में सहायता कर सकते हैं। इसी पाठ्यपुस्तक में पृष्ठ संख्या 174 पर गणित को एक विशेष रूप में प्रस्तुत किया गया है, जिसे संगीत के माध्यम से समझाने का प्रयास किया गया है। इसमें "आओ गाकर समझें" (चित्र 7) शीर्षक



आओ गा कर समझें

संग्रह करते हम सर्वप्रथम, सोद्देश्य आँकड़े संख्यात्मक।
फिर उन्हें व्यवस्थित करते हैं, निष्कर्ष ढूँढ़ते तथ्यात्मक।।
चित्रालेखों के माध्यम से, आँकड़े प्रदर्शित करते हैं।
या कभी दण्ड आरेख खींच, उनका विश्लेषण करते हैं।।
संख्याओं का विज्ञान आज, 'सांख्यिकी' चतुर्दिक छायी है।
हर क्षेत्र हर विषय में इसकी, है पहुँच, बड़ी गहराई है।।

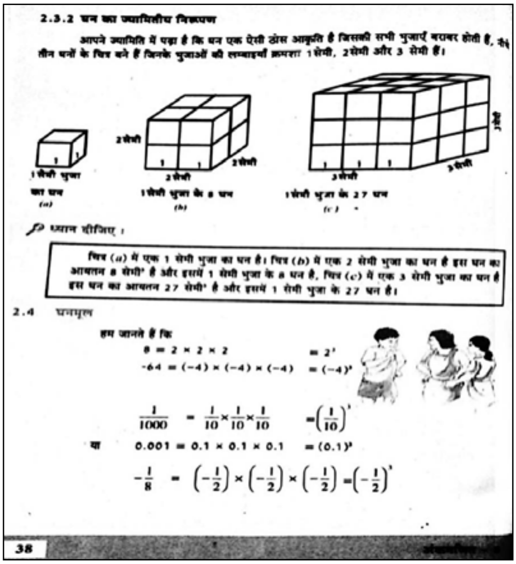
चित्र 7

नाम से एक गणितीय कविता लिखी गई है, जिसमें विद्यार्थियों को आँकड़े, निष्कर्ष, विश्लेषण एवं सांख्यिकी जैसे शब्दों का इस्तेमाल कर गणित से परिचित कराने एवं गणित में रुचि विकसित करने का प्रयास किया गया है। जैसा कि हम सभी जानते हैं कि खेल मानव जीवन में महत्वपूर्ण योगदान देते हैं तथा कक्षा में विद्यार्थियों के मानसिक एवं शारीरिक विकास में सहायक होते हैं, जिनमें स्थानीय खेलों का अपना एक महत्वपूर्ण स्थान होता है। शिक्षक को कक्षा में इस बात का विशेष ध्यान देना चाहिए कि विद्यार्थियों के लिए किस प्रकार की खेल क्रियाओं की व्यवस्था की जाए।

इसी पाठ्यपुस्तक की पृष्ठ संख्या 140 पर 'आँकड़ों का अभिलेखन' करना विद्यार्थियों को मिठाई के नाम से समझाया गया है, जैसे — गुलाब जामुन और जलेबी आदि अन्य मिठाइयों के नाम से विद्यार्थियों को आँकड़ों का अभिलेखन करना सिखाया गया है। इस तरह के खेल को शिक्षक कक्षा में ब्लैकबोर्ड पर विद्यार्थियों को समूह में बैठाकर करा सकते हैं। इसी क्रम में कक्षा 7 की *अंकगणित* पाठ्यपुस्तक में पृष्ठ संख्या 99 पर अंको को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त करना सिखाया गया है। इस तरह के खेलों से विद्यार्थियों को अंकों पर आधारित विभिन्न प्रकार के सवालों को हल करना, दशमलव संख्या के प्रयोग एवं विशेषताओं को जानने में भी सहायता मिलती है।

कक्षा 7 की पाठ्यपुस्तक *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित* में पृष्ठ संख्या 45 पर तार्किक प्रश्नों को रेखीय समीकरण की सहायता से हल करना सिखाया गया है। इसमें निम्नलिखित सारणी में रिक्त स्थानों की पूर्ति अपनी अभ्यास पुस्तिका में करने का निर्देश दिया गया है। इस तरह की सारणी को शिक्षक कक्षा में ब्लैकबोर्ड पर बनाकर विद्यार्थियों को विभिन्न समूह में बैठाकर एक-एक करके उत्तर प्राप्त कर सकते हैं। जिसके आधार पर विद्यार्थियों में कक्षा में सहभागिता को बढ़ावा दिया जा सकता है, साथ ही साथ सोचने की शक्ति एवं समीकरण समझाने तथा उनके हल निकालने में सहायता मिल सकती है। कक्षा 8 की पाठ्यपुस्तक *आओ सीखें अंकगणित* में पृष्ठ संख्या 111 पर संख्या एवं उनके वर्गमूल पर आधारित तालिका का उपयोग किया गया है, जिसका उपयोग कक्षा में विद्यार्थियों को समूह में बैठाकर विभिन्न संख्याओं का वर्गमूल निकालना एवं उनके उपयोग करने में लिया जा सकता है। इस तरह की गतिविधियाँ विद्यार्थियों में पैटर्न से सामान्यीकरण करना, नयी परिस्थितियों में सोचना एवं तर्क करने की क्षमता को बढ़ावा देते हैं।

इस तरह के खेल बेसिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश बोर्ड की पाठ्यपुस्तक में विभिन्न जगहों पर अंकित हैं। एवं विधिवत रूप से इस्तेमाल किए गए हैं।



2.3.2 घन का ज्यामितीय निरूपण

आपने ज्यामिति में पढ़ा है कि घन एक ऐसी ठोस आकृति है जिसकी सभी भुजाएँ बराबर होती हैं, नीचे तीन घनों के चित्र बने हैं जिनके भुजाओं की लम्बाइयाँ क्रमशः 1 सेमी, 2 सेमी और 3 सेमी हैं।

ध्यान दीजिए।

चित्र (a) में एक 1 सेमी भुजा का घन है। चित्र (b) में एक 2 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 8 सेमी³ है और इसमें 1 सेमी भुजा के 8 घन है, चित्र (c) में एक 3 सेमी भुजा का घन है इस घन का आयतन 27 सेमी³ है और इसमें 1 सेमी भुजा के 27 घन है।

2.4 घनमूल

हम जानते हैं कि

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$-64 = (-4) \times (-4) \times (-4) = (-4)^3$$

$$\frac{1}{1000} = \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \left(\frac{1}{10}\right)^3$$

या $0.001 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = (0.1)^3$

$$-\frac{1}{8} = \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3$$

38

चित्र 8

इसी पुस्तक की पृष्ठ संख्या 38 पर 'घन का ज्यामितीय निरूपण' खेल के माध्यम एवं चित्रों का इस्तेमाल करते हुए समझाया गया है। इस गतिविधि में घन का निरूपण एवं उसकी सभी भुजाओं को एक ठोस आकृति के रूप में प्रदर्शित कर क्रमशः तीन चित्रों के माध्यम से समझाया गया है (चित्र 8)।

इस तरह की गतिविधियाँ विद्यार्थियों में तर्क करने, चित्रों को समझने एवं बढ़ते हुए पैटर्न को समझने की क्षमताओं का विकास करती हैं। साथ ही साथ इसका उपयोग प्रारंभिक स्तर पर तर्क के विभिन्न आयामों को बढ़ावा देने एवं विकसित करने के उपयोग में किया जा सकता है। उत्तर प्रदेश की पाठ्यपुस्तकों में केवल गतिविधि एवं खेलों पर ही

इसे जानें

हार्डी रामानुजन संख्या 1729

एक बार प्रोफेसर जी.एच.हार्डी रामानुजन से मिलने गये। उस समय रामानुजन अपनी बीमारी के इलाज के लिये अस्पताल में भर्ती थे। बातें करते समय हार्डी ने रामानुजन से कहा मैं जिस टैक्सी से आया हूँ उसका नम्बर 1729 था, और यह एक शुभ संख्या नहीं है। रामानुजन ने तुरन्त उत्तर दिया – नहीं यह एक रोचक (interesting) संख्या है। उन्होंने बताया कि यह ऐसी सबसे छोटी संख्या है जिसे दो घनों के योग के रूप में दो प्रकार से लिखा जा सकता है। तब से इस संख्या 1729 को 'हार्डी रामानुजन संख्या' कहा जाने लगा। रामानुजन इस विशेषता की खोज उसी समय कर चुके थे जब वह मैट्रिक में थे।

अभ्यास 2(d)

चित्र 9

बल नहीं दिया गया, साथ-ही-साथ कुछ विशेष प्रकार के गतिविधियों को भी विद्यार्थियों को बताया गया है, जिससे विद्यार्थियों की रुचि गणित में बने एवं गणित सीखने के प्रति लगाव पैदा हो सके। उदाहरण के तौर पर पृष्ठ संख्या 57 पर 'इसे जानें' के नाम से एक बेहद रोचक प्रकरण का ज़िक्र किया गया है, जिसे हार्डी रामानुजन संख्या 1729 के नाम से बताया गया है (चित्र 9)।

अब हम देखते हैं कि
495 तथा 594 का योगफल
$= 495 + 594$
$= 1089$

उपर्युक्त की भाँति आप तीन अंकों की कोई भी दूसरी संख्या, जिसमें इकाई और सैकड़ा के अंकों का अन्तर 1 से अधिक हो, चुनकर यह खेल खेल सकते हैं।

सत्यापन :

माना तीन अंकों की संख्या

$100a + 10b + c$ .... (1) है, जहाँ a, b तथा c क्रमशः सैकड़ा, दहाई तथा इकाई के अंक हैं तथा a और c के बीच का अन्तर 1 से अधिक है।

अब अंकों का क्रम उलटने पर नयी संख्या

$100c + 10b + a$ .... (2) होगी।

अब (1) से (2) घटाने पर,

$100(a-c) + 0 + (c-a)$

या, $100(a-c) - 100 + 100 + (c-a)$

या, $100(a-c-1) + 90 + (10+c-a)$ ....(3)

उपर्युक्त संख्या के अंकों को उलटने पर पुनः नयी संख्या

$100(10+c-a) + 90 + (a-c-1)$ ....(4)

अतः (3) और (4) को जोड़ने पर,

$100(a-c-1+10+c-a) + 180 + (10+c-a+a-c-1)$

$= 900 + 180 + 9 = 1089$

शिक्षार्थियों की सहभागिता से कतिपय गणित के खेल एवं पहेलियाँ :

(1) दो शिक्षार्थियों के बीच का खेल :

मान लीजिए A और B दो सहपाठी हैं। इन्हें क्रमानुसार 1 से 6 तक का कोई अंक बोलने को कहा जाय। खेल A के बोलने से प्रारम्भ कीजिए। A के बाद B, फिर B के बाद A, फिर A के बाद B, ... इसी क्रम से आगे बढ़ा जाय। साथ ही बोले गये अंकों का उत्तरोत्तर योग करते जाएं। योगफल की कोई एक सीमा जो 50, 60, ... (अधिकतम 100) हो, खेल प्रारंभ होने के पहले ही निर्धारित कर ली जाय। खेल जीतने की शर्त यह होगी कि जिस शिक्षार्थी के द्वारा बोले गये अंक को उत्तरोत्तर योगफल में सम्मिलित करते ही

70 अंकगणित

चित्र 10

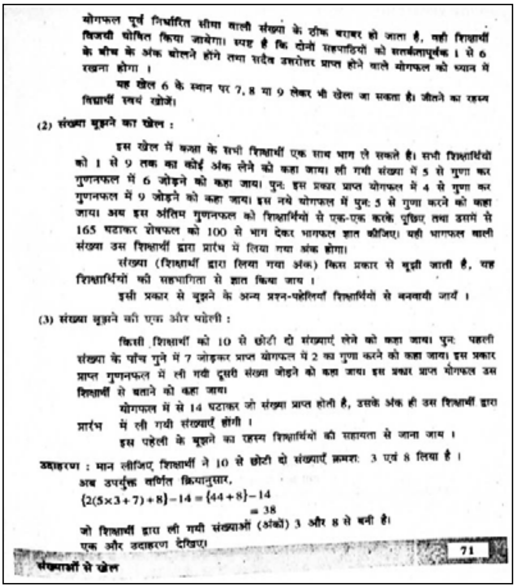
कक्षा 8 की पाठ्यपुस्तक में संख्याओं से खेल का एक पाठ है, जिस पाठ के अंतर्गत कई प्रकार की क्रियाएँ एवं खेल गतिविधियाँ विद्यार्थियों को कराई गई हैं, जैसे — दो शिक्षार्थियों के बीच का खेल, संख्या बूझने का खेल, संख्या बूझने की एक और पहेली, का उपयोग किया गया है। जिससे यह स्पष्ट प्रतीत होता है कि खेल और गणित दोनों ही आपस में परस्पर संबंध रखते हैं (चित्र 10 एवं 11)। अतः खेलों के माध्यम से कक्षा एवं कक्षा के बाहर शिक्षक विद्यार्थियों को गणित से रूबरू करा सकते हैं एवं गणित के प्रति रुचि पैदा कर सकते हैं। जिससे विद्यार्थियों के मन में गणित के प्रति आने वाले भय जिसे कि सामान्यतः हम गणित की चिंता (Math Anxiety) एवं गणित का भय (Math Phobia) के नाम से भी जानते हैं, का समाधान संभव है।

इस प्रकार कक्षा 6, 7 एवं 8 की गणित पाठ्यपुस्तकों का अवलोकन करने के बाद निश्चित रूप से यह कहा जा सकता है कि ये पुस्तकें बाल केंद्रित एवं *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा—2005* पर आधारित हैं। इन पाठ्यपुस्तकों का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों में तर्क, चिंतनशील तर्क एवं विभिन्न प्रकार के अवलोकन पर आधारित गतिविधियाँ कराना है। जिसका उपयोग शिक्षक अपनी कक्षा में करे तो वह अपने विद्यार्थियों में गणित के कौशलों का विकास कर सकता है।

खेल एवं गणित शिक्षक

शिक्षक द्वारा खेल-खेल में गणित शिक्षण करने के लिए कुछ मौलिक सुझाव—

- कुछ खेलों की संरचना व नियमों में आंशिक परिवर्तन करना चाहिए ताकि वह गणितीय समझ को विकसित करने का माध्यम भी बन सकें।
- कुछ नये रोचक खेलों को विभिन्न स्रोतों से खोजकर विद्यार्थियों के समक्ष प्रस्तुत किया जा सकता है।
- प्रारंभिक शिक्षक को विद्यालयी समय-सारणी व शैक्षिक कैलेंडर में खेलों का उचित समावेश करने हेतु प्रयास करना होगा।


योगफल पूर्व निर्धारित सीमा वाली संख्या के ठीक बराबर हो जाता है, वही शिक्षार्थी विजयी घोषित किया जायेगा। स्पष्ट है कि दोनों सहपाठियों को सतर्कतापूर्वक 1 से 6 के बीच के अंक बोलने होंगे तथा सदैव उत्तरोत्तर प्राप्त होने वाले योगफल को ध्यान में रखना होगा।

यह खेल 6 के स्थान पर 7, 8 या 9 लेकर भी खेला जा सकता है। जीतने का रहस्य विद्यार्थी स्वयं खोजें।

(2) संख्या बूझने का खेल :

इस खेल में कक्षा के सभी शिक्षार्थी एक साथ भाग ले सकते हैं। सभी शिक्षार्थियों को 1 से 9 तक का कोई अंक लेने को कहा जाय। ली गयी संख्या में 5 से गुणा कर गुणनफल में 6 जोड़ने को कहा जाय। पुनः इस प्रकार प्राप्त योगफल में 4 से गुणा कर गुणनफल में 9 जोड़ने को कहा जाय। इस नये योगफल में पुनः 5 से गुणा करने को कहा जाय। अब इस अंतिम गुणनफल को शिक्षार्थियों से एक-एक करके पूछिए तथा उसमें से 165 घटाकर शेषफल को 100 से भाग देकर भागफल ज्ञात कीजिए। वही भागफल वाली संख्या उस शिक्षार्थी द्वारा प्रारंभ में लिया गया अंक होगा।

संख्या (शिक्षार्थी द्वारा लिया गया अंक) किस प्रकार से बूझी जाती है, यह शिक्षार्थियों की सहभागिता से ज्ञात किया जाय।

इसी प्रकार से बूझने के अन्य प्रश्न-पहेलियाँ शिक्षार्थियों से बनवायी जायँ।

(3) संख्या बूझने की एक और पहेली :

किसी शिक्षार्थी को 10 से छोटी दो संख्याएँ लेने को कहा जाय। पुनः पहली संख्या के पाँच गुने में 7 जोड़कर प्राप्त योगफल में 2 का गुणा करने को कहा जाय। इस प्रकार प्राप्त गुणनफल में ली गयी दूसरी संख्या जोड़ने को कहा जाय। इस प्रकार प्राप्त योगफल उस शिक्षार्थी से बताने को कहा जाय।

योगफल में से 14 घटाकर जो संख्या प्राप्त होती है, उसके अंक ही उस शिक्षार्थी द्वारा प्रारंभ में ली गयी संख्याएँ होंगी।

इस पहेली के बूझने का रहस्य शिक्षार्थियों की सहायता से जाना जाय।

उदाहरण : मान लीजिए शिक्षार्थी ने 10 से छोटी दो संख्याएँ क्रमशः 3 एवं 8 लिया है।

अब उपर्युक्त वर्णित क्रियानुसार,

$\{2(5\times3+7)+8\}-14=\{44+8\}-14$

$=38$

जो शिक्षार्थी द्वारा ली गयी संख्याओं (अंकों) 3 और 8 से बनी है।

एक और उदाहरण देखिए।

71

संख्याओं से खेल

चित्र 11

- विद्यार्थियों द्वारा खेले जाने वाले लोक प्रचलित एवं अन्य प्रकार के खेलों को चिह्नित कर सूची तैयार की जाए।
- खेलों के लिए आवश्यक सामग्री का निर्माण शिक्षक को स्वयं करना चाहिए व विद्यार्थियों के सहयोग से भी इसे तैयार करना प्रभावशाली साबित हो सकता है।

- कक्षा-कक्ष वातावरण व खेल मैदान का आवश्यकता के अनुसार उपयोग करने की ऐसी कार्ययोजना तैयार करनी चाहिए कि अन्य विषयों का अध्ययन-अध्यापन बाधित न हो।
- खेलने के दौरान विद्यार्थियों द्वारा प्रदर्शित उपलब्धियों एवं प्रदर्शनों को गहराई से अवलोकन कर अभिलेख करना व आकलन में इसको उचित स्थान देना। हारने वाले विद्यार्थियों या औसत प्रदर्शन करने वाले विद्यार्थियों द्वारा प्रदर्शित सकारात्मक व्यवहार को भी आकलन के लिए महत्वपूर्ण मानना चाहिए।

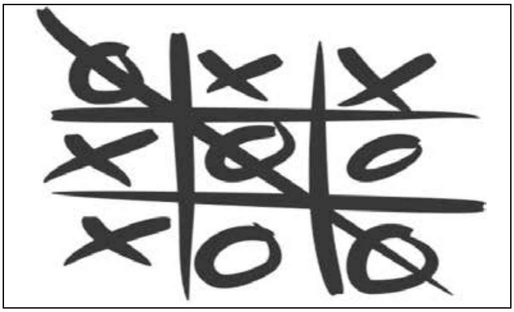
कुछ प्रमुख गणितीय खेल

***टिक-टक-टोई बहुविकल्पी* (*Tic-Tac-Toe*)**

यह दो खिलाड़ियों, X और O के लिए एक पेपर और पेंसिल गेम है, जिसमें 3×3 ग्रिड में रिक्त स्थान को चिह्नित करते हैं। जो खिलाड़ी क्षैतिज, ऊर्ध्वाधर या विकर्ण पंक्ति में अपने तीन अंक रखने में सफल होता है, वह खेल जीतता है।

खेल के लिए आवश्यक कौशल

खेल के लिए आवश्यक कौशलों, जैसे— रणनीति, अवलोकन एवं तर्क का समुचित प्रयोग करना ज़रूरी है। इस खेल को कभी-कभी कक्षा के वातावरण को हलका करने एवं विद्यार्थियों को तरोताज़ा करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है। शिक्षक इस बॉक्स को ब्लैकबोर्ड पर बनाकर, विद्यार्थियों से एक-एक कर रिक्त स्थान में भरने के लिए पूछ सकता है। इस प्रकार विद्यार्थियों में सोचने एवं तर्क कौशल का विकास खेल-खेल के माध्यम से कराया जा सकता है तथा



चित्र 13

कभी-कभी इस खेल को मनोरंजन के लिहाज़ से पूरी कक्षा को दो समूहों में बाँटकर खिलाया जा सकता है।

***सुडोकु* (*Sudoku*)**

सुडोकु एक खेल है, जो वर्ग पहेली या शतरंज पहेलियों की तरह होता है। एक शाब्दिक वर्ग पहेली की तरह इसमें एक वर्ग के अंदर 9×9 खाने बने होते हैं। सुडोकु का लक्ष्य अंकों के साथ 9×9 ग्रिड भरना है; ताकि प्रत्येक कॉलम पंक्ति और 3×3 खंड में 1 से 9 के बीच की संख्या हो। खेल की शुरुआत में, 9×9 ग्रिड में कुछ वर्गों में संख्या भरी होती है। खेलने वाला रिक्त स्थानों को उचित संख्या से भरने और ग्रिड को पूरा करने के लिए तर्क का उपयोग

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

करता है। परंतु शर्त यह है कि किसी भी पंक्ति (क्षैतिज) में 1 से 9 तक कि कोई भी संख्या दो बार न आए। किसी भी पंक्ति (ऊर्ध्वाधर) में 1 से 9 तक कि कोई भी संख्या दो बार न आए।

खेल के लिए आवश्यक कौशल

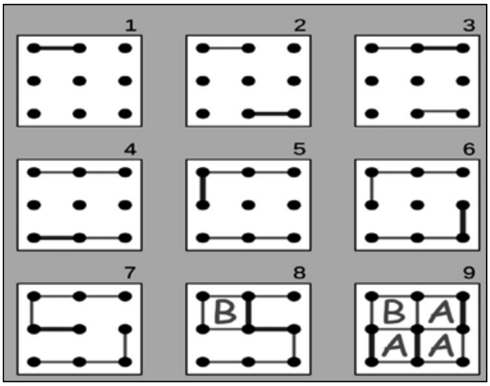
रणनीति, संख्याओं को तार्किक स्थान पर रखना, गणना करना, एकाग्रता बनाना, तर्क करना।

कक्षा में उपयोग

यह खेल अधिक संज्ञानात्मक स्तर का है, इसलिए इसमें विद्यार्थियों के साथ-साथ शिक्षक की भी पूरी भागीदारी होती है। इस खेल को शुरू करने से पहले शिक्षक द्वारा पूरी कक्षा को दो अलग-अलग समूहों में बाँट लेना चाहिए, जैसे— समूह अ और समूह ब तत्पश्चात् इस सुडोकु बॉक्स को ब्लैकबोर्ड पर बना लेना चाहिए तथा दोनों समूहों से एक-एक करके उत्तर लेना चाहिए। जिस समूह के उत्तर ज़्यादा सही हों, उसको विजयी बनाना चाहिए। इससे विद्यार्थियों में सामूहिक रूप से उत्तर देने एवं गणना करने के कौशल में गज़ब का विकास हो सकता है एवं साथ-ही-साथ संख्याओं के तार्किक जोड़ एवं घटाने का कौशल भी विकसित किया जा सकता है।

डॉट्स और बॉक्सेस (Dots and Boxes)

यह दो खिलाड़ियों के लिए एक पेंसिल और पेपर गेम है (कभी-कभी दो से अधिक खिलाड़ी भी हो सकते हैं)। इस खेल में खिलाड़ियों को ग्रिड पर डॉट्स के बीच रेखा खींचने में बदला जाता है। सबसे ज़्यादा बॉक्स बनाने वाला खिलाड़ी, जीतने



वाला खिलाड़ी होता है। खेल को एक आयताकार बिंदु से शुरू किया जाता है। दो खिलाड़ियों में से कोई एक खेल की शुरुआत करता है और दो बिंदुओ के बीच एक-एक क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर लाइन के साथ दो बिंदुओं को जोड़ता है। यदि कोई खिलाड़ी बॉक्स के चौथे पक्ष को पूरा करता है तो वह उस बॉक्स को जीत लेता है।

खेल के लिए आवश्यक कौशल

संख्यात्मक और स्थानिक संरचनाओं का समन्वयन करना, अनुक्रम पद के स्थानिक विन्यास के बारे में सोचना, अमूर्त तर्क, चिंतन करना।

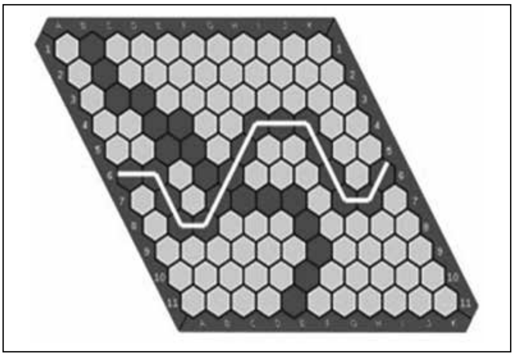
कक्षा में उपयोग

इस खेल में दो या दो से अधिक विद्यार्थियों को एक साथ खिलाया जा सकता है। इस खेल का उपयोग कक्षा में तभी करना चाहिए, जब विद्यार्थियों में अनुक्रम-पद के स्थानिक विन्यास के बारे में सोचना, अमूर्त तर्क, चिंतन जैसे कौशलों का विकास करना हो। खेल के शुरुआत में शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों को समूहों में बाँट लेना चाहिए एवं प्रत्येक समूह में एक बच्चे को मूल्यांकन के लिए रखना चाहिए,

जिससे मूल्यांकन भी सही हो और खेलने वालों के साथ-साथ उस विद्यार्थी का भी विकास हो, जो मूल्यांकन कर रहा है। वह विद्यार्थी भी लगातार खेल के हर चरण को ध्यान से देखेगा और प्रत्येक चरण में अपना तर्क भी लगाएगा। क्योंकि किसी भी खेल को देखते समय कोई भी व्यक्ति सिर्फ़ देखता ही नहीं, बल्कि उसमें मानसिक रूप से स्वयं भी शामिल रहता है।

हेक्स (Hex)

हेक्स दो खिलाड़ियों द्वारा हेक्सागोनल ग्रिड पर खेला जाने वाला एक रणनीति बोर्ड गेम है। इस खेल में दो रंगों का प्रयोग होता है। प्रत्येक खिलाड़ी को बोर्ड के दो आमने-सामने के किनारे दिए जाते हैं। जिसमें अपने रंग की गोटियाँ कुछ इस तरह से भरते हैं कि वे एक सतत रेखा बनाते हुए एक तरफ़ से दूसरी तरफ़ पहुँच जाते हैं और जो खिलाड़ी पहले ऐसा कर लेता है, वह खेल जीत जाता है।



खेल के लिए आवश्यक कौशल

सतत रेखा बनाना आना, आकृतियों का उपयोग करना आना, संरचनात्मक समझ/ बढ़ते हुए पैटर्नों को समझना।

कक्षा में उपयोग

हेक्स दो विद्यार्थियों द्वारा एक साथ खेलने वाला खेल है, जिसमें विभिन्न गणितीय कौशलों का विकास किया जा सकता है। इसमें विद्यार्थियों को दो-दो के अलग-अलग समूहों में बाँटकर खिलाया जा सकता है। जब ज्यामितीय एवं अन्य ऐसे पाठ जहाँ संरचनात्मक एवं बढ़ते हुए पैटर्नों को समझना पड़े तो ऐसे पाठों को शुरू करने से पहले इस खेल का प्रयोग किया जा सकता है।

कुछ प्रमुख गणितीय सॉफ़्टवेयर

मैथ फ़ॉर चाइल्ड (Math for Child)

मैथ फ़ॉर चाइल्ड सभी उम्र के विद्यार्थियों के लिए निःशुल्क सॉफ़्टवेयर, विंडोज़, आईओएस (Windows, iOS) के लिए डिज़ाइन किया गया है। इसके उपयोग से विद्यार्थियों को जोड़, घटाव, विभाजन और गुणा सहित बुनियादी गणित सीखने के साथ गणितीय समझ विकसित करने में भी मदद मिलती है। इसमें विभिन्न कठिन स्तर हैं जिनका प्रयोग अंकगणित कौशल को सुधारने के लिए किया जा सकता है।

कैलकुलेटर फ़ॉर किड्स (Calculator for Kids)

यह विद्यार्थियों के लिए एक बुनियादी गणित कैलकुलेटर की तरह है। यह कैलकुलेटर सॉफ़्टवेयर पूरी तरह से मुफ़्त है तथा विद्यार्थियों को बुनियादी गणित और सरल गणित कार्यों पर एक मज़बूत पकड़ विकसित करने में मदद करता है। यह एक पोर्टेबल ऐप है, जिसका उपयोग गणित सीखने के लिए मीडिया स्टोरेज डिवाइस में किया जा सकता है। कुछ

अन्य प्रमुख गणितीय सॉफ़्टवेयर जिनके उपयोग से विद्यार्थियों में गणित की समझ एवं गणित के प्रति रुझान पैदा किया जा सकता है—

- माइक्रोसॉफ़्ट मैथमेटिक्स (Microsoft Mathematics)
- मैथ एडिटर (Math Editor)
- फ़ोटोमैथ (Photo Math)
- फ्री यूनिवर्सल अलजेब्रा इक्वेशन सॉल्वर (Free Universal Algebra Equation Solver)
- मक्सिमा (Maxima)
- जिओज़ेब्रा (Geogebra)
- मैथ प्रैक्टिस (Math Practice)

निष्कर्ष

गणितीय ज्ञान, तर्क एवं कई गणितीय कौशल लगभग सारे खेलों में होते हैं। जिनमें कहीं-न-कहीं गणितीय या संख्यात्मक ज्ञान छुपा ही होता है। क्योंकि बिना गणितीय सहायता के हम किसी भी खेल की कल्पना नहीं कर सकते हैं। उदाहरण के तौर पर शतरंज, लूडो, साँप-सीढ़ी आदि शामिल हैं। विद्यालयी शिक्षा में गणित शिक्षण हमेशा ही एक चुनौतीपूर्ण कार्य रहा है। गणित शिक्षण हमेशा शिक्षकों के सामने एक चुनौती पेश करता रहा है कि कैसे इसे सरल-से-सरल तरीके से पढ़ाया जाए और विद्यार्थियों के स्तर पर पहुँचकर, उन्हें सिखाया जाए। विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान को कक्षा में सिखाए जाने वाले गणित के ज्ञान से जोड़ना, एक शिक्षक के लिए बेहद चुनौतीपूर्ण कार्य माना जाता है। इसलिए गणित शिक्षण को रुचिपूर्ण एवं सरल बनाना, शिक्षक के सामने सबसे बड़ी चुनौती के रूप में आता है। हम सभी जानते हैं कि विद्यार्थियों को खेल-खेलना पसंद है, लेकिन हम खेल की इस रुचि को गणित सीखने के अनुभवों में कैसे बदल सकते हैं? एक अच्छे गणित के खेल के गुण क्या हैं और क्या हमें सामान्य गतिविधि की बजाय नियमित कार्यों और होमवर्क में खेलों को शामिल करना चाहिए? स्कूल में खेल-खेलने का लाभ घर पर भी होता है। इसी तरह विद्यार्थियों को प्रेरित किया जाता है कि वे गणित के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण विकसित करें।

गणित शिक्षक को इस बिंदु पर विस्तार से विमर्श करना आवश्यक है कि गणित विषय में ज्ञान निर्माण के तौर-तरीके बाकी विषयों से भिन्न हैं एवं जटिल भी हैं जो सिर्फ़ रटने मात्र से ही नहीं हो पाता। उसमें संज्ञानात्मकता के स्तर पर उचित तर्क एवं क्रमबद्धता का अनुसरण करते हुए प्रत्येक चरणों को धीरे-धीरे समझना पड़ता है और यह विशेषता खेल पद्धति से बिलकुल मिलती-जुलती है। किसी भी खेल को देखें हर खेल की अपनी एक विशेषता होती है तथा हर स्तर में धीरे-धीरे बढ़ने की विशेषता समाहित होती है। जैसे-जैसे खेल आगे बढ़ता है, प्रत्येक चरण में अलग-अलग नियम एवं गणितीय जोड़ व घटाव का उपयोग समाहित रहता है। ठीक इसी तरह गणित में भी संरचनाएँ व्यवस्थित रहती हैं। जिसमें विद्यार्थी धीरे-धीरे उचित तरीके से अपनी बुद्धि का इस्तेमाल करते हुए गणित के सवालों को हल करते हैं एवं गणित की बारीकियों को सीखते हैं। इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि गणित एवं खेल में बहुत ही समानताएँ हैं और गणित को खेल विधि से सिखाया जाए तो गणित शिक्षण प्रभावी हो सकता है।

संदर्भ

उत्तर प्रदेश बेसिक शिक्षा परिषद्. 2013. *आओ सीखें अकंगणित, कक्षा* 6. उत्तर प्रदेश.

———. 2013. *आओ सीखें अकंगणित, कक्षा* 7. उत्तर प्रदेश.

———. 2013. *आओ सीखें अकंगणित, कक्षा* 8. उत्तर प्रदेश.

———. 2013. *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित, कक्षा* 6. उत्तर प्रदेश.

———. 2013. *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित, कक्षा* 7. उत्तर प्रदेश.

———. 2013. *आओ सीखें बीजगणित तथा रेखागणित, कक्षा* 8. उत्तर प्रदेश.

चौरसिया, पी. गोस्वामी, ए. 2015. कंटेंट एनालिसिस ऑफ़ मैथेमैटिक्स टेक्स्टबुक ऑफ़ बेसिक शिक्षा परिषद् उत्तर प्रदेश बोर्ड. *इंडियन जर्नल ऑफ़ एक्सपेरीमेंटेशन एंड इन्नोवेशन इन एजुकेशन*. वॉल्यूम-IV, अंक – VI.

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद्. 2006. *राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005*. एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली.

———. 2006. *गणित शिक्षण राष्ट्रीय फ़ोकस समूह का आधार पत्र*. एन.सी.ई.आर.टी., नयी दिल्ली.

———. 2013. *मैथ मैजिक,* कक्षा 6. एन.सीई.आर.टी., नयी दिल्ली.

———. 2013. *मैथ मैजिक,* कक्षा 5. एन.सीई.आर.टी, नयी दिल्ली

https://en.wikipedia.org/wiki/Tic-tac-toe.

https://en.wikipedia.org/wiki/Dots_and_Boxes.

https://images.theconversation.com/files/82861/original/image-20150525-32575-5qxcow jpg?ixlib=rb-1.1.0&q=45&auto=format&w=754&fit=clip.

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/ff/Sudoku-by-L2G-20050714svg.